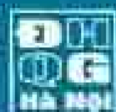
HÀ VĂN CHƯƠNG - TRẦN VĂN TOÀN

50 ĐỀ THI

MÔN TOÁN

Thi vào lớp 10





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀ VĂN CHƯƠNG - TRẦN VĂN TOÀN

* * *

50 Đề thi MÔN TOÁN Thi vào lớp 10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập
NS Bình Thạnh

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ : 374 Xô Viết Nghệ Tĩnh P.25 - Q.BT - TP.HCM
ĐT: 5117907 - Fax: 8999898
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

50 Đề thi môn Toán thi vào lớp 10
Mã số : 1L - 253 ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in **VIỆT HƯNG.**
Số xuất bản : 769 - 2007/CXB/29 - 114/ĐHQGHN ngày 21/09/2007.
Quyết định xuất bản số : 581 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.

MỤC LỤC

ĐỀ 1

Câu 1. *Cho hai biểu thức:* $A = \dfrac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$; $B = \dfrac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$

a) Tìm điều kiện có nghĩa mỗi biểu thức.

b) Rút gọn A và B.

c) Tính tích A.B với $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ *và* $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Câu 2. *Giải các phương trình:*

a) $x - \dfrac{15}{x} = 2$ *b)* $\sqrt{x+5} - 2 = 0$

Câu 3. *Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì làm xong trong 4 giờ. Nếu mỗi đội làm một mình để làm công việc ấy, thì đội thứ nhất cần thời gian ít hơn so với đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình công việc ấy trong bao lâu?*

Câu 4. *Cho hai đường tròn* (O_1) *và* (O_2) *cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn về phía nửa mặt phẳng bờ* O_1O_2 *chứa điểm B, có tiếp điểm thứ tự là E và F. Qua A vẽ cát tuyến song song với EF cắt đường tròn* (O_1) *và* (O_2) *theo thứ tự tại C và D. Đường thẳng CE và đường thẳng DF cắt nhau tại I.*

a) Chứng minh IA vuông góc CD

b) Chứng minh tứ giác IEBF nội tiếp

c) Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của EF

Câu 5. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $A = 2(m + p) + mp - m^2 - p^2$

Giải

Câu 1.

a) Điều kiện có nghĩa của biểu thức A là $x > 0$; $y > 0$; $x \neq y$

Điều kiện có nghĩa của biểu thức B là $xy > 0$

b) Rút gọn: $A = \dfrac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dfrac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

c) $A.B = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = x - y$

Thay giá trị ta có: $A.B = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

Câu 2.

a) Điều kiện $x \neq 0$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta' = 1 + 15 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4$

Phương trình có hai nghiệm $x = -3$; $x = 5$

b) Điều kiện: $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$

Phương trình đã cho trở thành: $x + 5 = 4 \Rightarrow x = -1$

Câu 3. Gọi thời gian mà đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x giờ $(x > 4)$

Thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là $(x + 6)$ giờ

Như vậy trong một giờ thì đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc và đội thứ hai làm được $\frac{1}{x+6}$ công việc

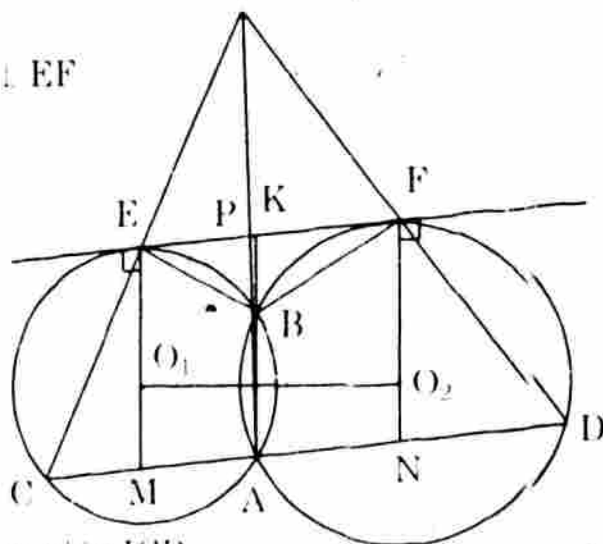
Cả hai đội làm chung thì làm xong công việc trong 4 giờ, nên một giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Do đó ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 6$; $x_2 = -4$ (loại)

Vậy đội thứ nhất làm một mình xong công việc trong 6 giờ và đội thứ hai làm một mình xong công việc trong 12 giờ.

Câu 4.



a) Ta có: $EF \parallel CD$; $O_1E \perp EF$; $O_2F \perp EF$

Suy ra: $O_1E \perp CD$ tại M

Và $O_2F \perp CD$ tại N

$\Rightarrow CM = MA$ và $AN = ND$

Tứ giác EFMN là hình chữ nhật nên ta có:

$$EF = MN = MA + NA = \frac{CA + AD}{2} = \frac{CD}{2}$$

$\Rightarrow$ EF là đường trung bình của tam giác ICD

Do đó: $IE = EC$ và $IF = FD$

Nên EM là đường trung bình của tam giác IAC $\Rightarrow EM \parallel IA$

Vậy $IA \perp CD$ (đpcm)

b) Ta có: $\widehat{IEB} + \widehat{BEC} = 180^\circ$ và $\widehat{BAC} + \widehat{BEC} = 180^\circ$ (tứ giác ABEC nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{IEB} = \widehat{BAC}$. Tương tự ta có: $\widehat{IFB} = \widehat{BAD}$

$\Rightarrow \widehat{IEB} + \widehat{IFB} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^o$

Vậy tứ giác IEBF nội tiếp (đpcm)

c) Gọi K là giao điểm của AB và EF

Xét đường tròn (O_1) ta có: $KE^2 = KA.KB$

Xét đường tròn (O_2) ta có: $KF^2 = KA.KB$

$\Rightarrow KE = KF$

Vậy đường thẳng AB đi qua trung điểm K là EF

Câu 5 $A = 2(m + p) + mp - m^2 - p^2$

$\Rightarrow 2A = 8 - (m - p)^2 - (m - 2)^2 - (p - 2)^2 \le 8 \Rightarrow A \le 4$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 4, đạt được khi m = p = 2

ĐỀ 2

Câu . *Giải các phương trình:*

a) $\dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{3}$ b) $(2x - 1)(x + 4) = (x + 1)(x - 4)$

Câu . *Vẽ đồ thị hàm số $y = -0,5x^2$. Trên đồ thị hàm số y lấy hai điểm A và B có hoành độ lần lượt là –1 và 2. Hãy viết phương trình đường thẳng AB*

Câu . *Cho* $A = \left(\dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}\right) : \dfrac{2\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)}{x - 1}$

a) Rút gọn A *b) Tìm x để A nhận giá trị nguyên*

Câu . *Cho tam giác cân ABC (AB = AC; $\widehat{A} = 90^o$), một cung tròn BC nằm bên trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi P là giao điểm của MB, IK và Q là giao điểm của MC, IH.*

a) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được

b) Chứng minh rằng tia đối của tia MI là phân giác góc HMK

c) Chứng minh rằng tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra PQ song song với BC.

d) Gọi (O_1) là đường tròn qua M, P, K; (O_2) là đường tròn qua M, Q, I; N là giao điểm thứ hai của (O_1), (O_2) và D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Giải

Câu 1.

a) $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{3}$

Điều kiện: $x \neq \pm 4$. Phương trình đã cho tương đương với:

$3(x+4)+3(x-4)=x^2-16 \Leftrightarrow x^2-6x-16=0 \Leftrightarrow x_1=8\ ;\ x_2=-2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 8$; $x = -2$

b) $(2x-1)(x+4)=(x+4)(x-4)$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x-x-4=x^2-4x+x-4 \Leftrightarrow x^2+10x=0 \Leftrightarrow x_1=0;\ x_2=10$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0$; $x = 10$

Câu 2. Hàm số xác định với mọi $x \in R$. Với $x < 0$ thì hàm số đồng biến và $x > 0$ thì hàm số nghịch biến

Bảng giá trị:

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	$-\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	−2

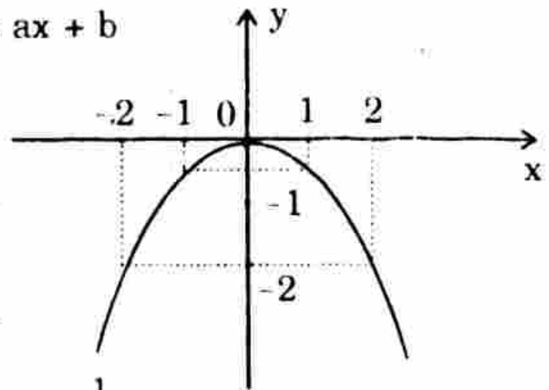
Với $x=-1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$ nên $A\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$; với $x=2 \Rightarrow y=-2$ nên $B(2;-2)$

Phương trình đường thẳng có dạng: $y = ax + b$

Vì đường thẳng đi qua A, B

nên ta có: $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}=-a+b\\ -2=2a+b\end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $a=-\dfrac{1}{2}$ và $b=-1$



Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=-\dfrac{1}{2}x-1$

Câu 3.

a) Điều kiện: $x > 0$; $x \neq 1$

Biểu thức đã cho tương đương với:

$$A=\left[\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\right]:\frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=2.\frac{\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

b) Ta có: $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

Với x số nguyên dương thì A là số nguyên khi $\sqrt{x}-1$ là ước của 2

- $\sqrt{x} - 1 = 1 \Rightarrow x = 4$
- $\sqrt{x} - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$ (không thoả điều kiện)
- $\sqrt{x} - 1 = 2 \Rightarrow x = 9$
- $\sqrt{x} - 1 = -2 \Rightarrow$ không có giá trị x

Vậy với x = 4; x = 9 thì A có giá trị nguyên

Câu 4.

a) Ta có: $MI \perp BC$, $MK \perp AB \Rightarrow \widehat{MIB} + \widehat{MKB} = 180^0$

Do đó tứ giác BIMK nội tiếp được đường tròn

Chứng minh tương tự ta được tứ giác MICH nội tiếp trong đường tròn

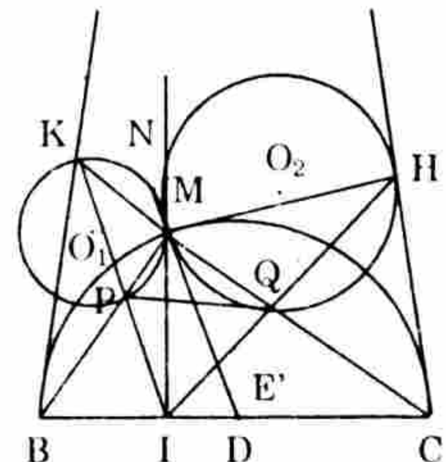
b) Do AB = AC nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Gọi tia đối của MI là Mx, các tứ giác BIMK, MICH nội tiếp nên:

$\widehat{IMH} = 180^0 - \widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{ABC} = \widehat{IMK}$

$\widehat{KMx} = 180^0 - \widehat{IMK} = 180^0 - \widehat{IMH} = \widehat{HMx}$

Vậy Mx là tia phân giác của $\widehat{HMK}$



c) Theo kết quả câu a) ta có:

$\widehat{MIK} = \widehat{MBK}$ và $\widehat{MIH} = \widehat{MCH}$

$\Rightarrow \widehat{PIQ} = \widehat{MIK} + \widehat{MIH} = \widehat{MBK} + \widehat{MCH}$

Mặt khác:

Sd $\widehat{MBI} = \dfrac{1}{2}$ sd $\overset{\frown}{CM}$ = sd $\widehat{MCH}$

Sd $\widehat{MBK} = \dfrac{1}{2}$ sd $\overset{\frown}{BM}$ = sd $\widehat{MCB}$

Suy ra: $\widehat{PIQ} = \widehat{MCB} + \widehat{MBC}$

Trong tam giác BMC thì $\widehat{BMC} = 180^0 - \left(\widehat{MCB} + \widehat{MBC}\right)$, do đó:

$$\widehat{BMC} + \widehat{PIQ} = 180^0 - \widehat{MBC} + \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = 180^0$$

Vậy tứ giác MPIQ nội tiếp được đường tròn

Từ đó suy ra $\widehat{MQP} = \widehat{MIP}$, mà $\widehat{MIP} = \widehat{MBK}$ và $\widehat{MBK} = \widehat{MCB}$

Do đó $\widehat{MQP} = \widehat{MCB}$ nên PQ // BC

d) Ta có: $\widehat{MIH} = \widehat{MQP}$ (vì cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ sd $\overset{\frown}{MQ}$)

Hai tia QP, QH nằm khác phía đối với QM nên đường tròn O_2 tiếp xúc với PQ tại Q.

Tương tự ta cũng có đường tròn O_1 tiếp xúc với PQ tại P

Do đó PQ là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2)

Gọi E và E' là giao điểm của MN với PQ, MN với BC

Ta có: $PE = \sqrt{EM.EN} = EQ$ (vì $\Delta PEM \sim \Delta NEP$ và $\Delta EQM \sim \Delta ENQ$)

Do PQ // BC $\Rightarrow \dfrac{EP}{E'B} = \dfrac{EQ}{E'C}$; PE = EQ nên E'B = E'C hay E' ≡ D

Vậy M, N, P thẳng hàng.

ĐỀ 3

Câu 1. *Cho hai hàm số:* $y = 2x + 2 \ (d_1)$; $y = -\dfrac{1}{2}x - 2 \ (d_2)$

a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ

b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với trục Oy là A, giao điểm của đường thẳng (d_2) với trục Ox là B và giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_2) là C

Tam giác ABC là tam giác gì? Tìm tọa độ các điểm A, B, C

c) Tính diện tích tam giác ABC

Câu 2.

a) Tính: $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Câu 3. *Hai vòi nước cùng chảy vào một bể lớn thì trong 10 giờ sẽ chảy đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 6 giờ và vòi thứ hai chảy trong 3 giờ thì bể chỉ đầy được* $\dfrac{2}{5}$ *bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì phải chảy trong bao lâu mới đầy bể ?*

Câu 4. *Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Một dây CD cắt AB tại E. Một tiếp tuyến (d) tiếp xúc với đường tròn tại B cắt các tia AC; AD tại M và N. Chứng minh:*

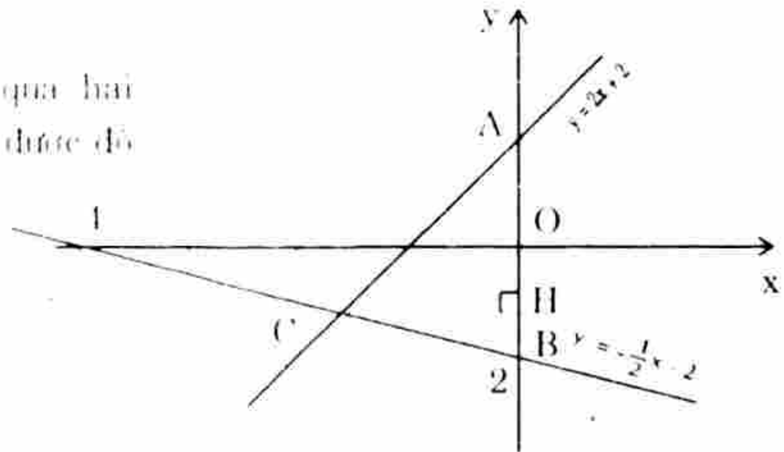
a) $\Delta ABC \sim \Delta ABM$ *b)* $AC.AM = AD.AN$

c) Tiếp tuyến tại C cắt (d) ở I. Chứng minh I là trung điểm AB

d) Xác định vị trí của dây CD sao cho tam giác AMN là tam giác đều

Giải

Câu 1.



a) Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm (-1; 0) và (0; 2) ta được đồ thị hàm số y = 2x + 2

Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm (-4; 0) và (0; -2) ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x - 2$

b) A là giao điểm của đường thẳng y = 2x + 2 với trục Oy nên: 2.0 + 2 = y ⇒ y = 2. Vậy tọa độ A là A(0; 2). Tương tự ta có tọa độ điểm B là B(0; -2). C là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) nên tọa độ điểm C thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: x = -1,6 ; y = -1,2

Vậy tọa độ điểm C là C(-1,6; -1,2)

Hai đường thẳng y = 2x + 2 và $y = -\frac{1}{2}x - 2$ có tích hai hệ số góc là:

$2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$. Nên chúng vuông góc nhau. Do đó ΔABC vuông ở C

c) Gọi H là hình chiếu của C trên Oy, ta có: $CH = |-1,6| = 1,6$

$AB = AO + OB = 2 + |-2| = 4$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}.4.1,6 = 3,2$

Câu 2.

a) $(\sqrt{2} - 1).(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$

b) $\begin{cases} x - y = 1 & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) + (2) ta được 2x = 6 ⇒ x = 3

Thay x = 3 vào (1) suy ra y = 2. Vậy hệ đã cho có nghiệm là: (3; 2)

Câu 3. Gọi số giờ theo thứ tự mà vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình sẽ đầy bể là x và y (x > 0; y > 0)

Mỗi giờ vòi thứ nhất chảy vào được $\frac{1}{x}$ bể, vòi thứ hai chảy vào được $\frac{1}{y}$ bể

Trong 6 giờ vòi thứ nhất chảy vào được $\frac{6}{x}$ bể, vòi thứ hai trong 3 giờ chảy vào được $\frac{3}{y}$ bể

Theo đề ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10} \\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $x = 30$, $y = 15$

Vậy nếu chảy một mình vòi thứ nhất phải chảy trong 30 giờ, vòi thứ hai chảy trong 15 giờ mới đầy bể.

Câu 4.

a) Xét hai tam giác ABC và ABM có:

$\widehat{ACB} = \widehat{ABM} = 90^o$; $\widehat{BAM}$ chung

Suy ra: $\Delta ABC \sim \Delta ABM$

b) Trong tam giác vuông ABM có:

$AB^2 = AM.AC$

Trong tam giác vuông ABM có:

$AB^2 = AN.AD$

Suy ra: $AM.AC = AN.AD$

c) Ta có: $IC = IB$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ICB} = \widehat{IBC} \Rightarrow \widehat{ICM} = \widehat{IMC} \Rightarrow IC = IM = IB$

Hay I là trung điểm của BM

d) Theo đề bài thì ΔAMN đều $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BAN} = 30^o$

$\Rightarrow CD = R\sqrt{3}$ và $\widehat{CBA} = 60^o \Rightarrow \Delta ACD$ đều nên $AB \perp CD$

Vậy để ΔAMN đều thì $AB \perp CD$ và $CD = R\sqrt{3}$

Câu 5.

a) $b(b - 3) + a(a + 3) - 2ab = b^2 - 3b + a^2 + 3a - 2ab$

$= (a^2 - 2ab + b^2) + 3(a - b) = (a - b)^2 + 3(a - b) = 5^2 + 3.5 = 40$

b) $\frac{4a - b}{3a + 5} + \frac{3b - a}{2b + 5} = \frac{3 + (a - b)}{3a + 5} + \frac{2b + (b - a)}{2b - 5}$

$= \frac{3 + (a - b)}{3a + 5} + \frac{2b - (a - b)}{2b - 5} = \frac{3a + 5}{3a + 5} + \frac{2b - 5}{2b - 5} = 1 + 1 = 2$

ĐỀ 4

Câu 1.

a) So sánh hai số: $3 + \sqrt{5}$ và $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

b) Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(4 + \sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{6}\right)\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

Câu 2. *Trong hệ trục tọa độ vuông góc, gọi (P) là đồ thị hàm số $y = x^2$.*

a) Vẽ (P)

b) Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là: -1 và 2. Viết phương trình đường thẳng AB

c) Viết phương trình đường thẳng (D) song song với AB và tiếp xúc với (P)

Câu 3. *Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm 2m, chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm $100m^2$. Nếu giảm cả chiều dài lẫn chiều rộng đi 2m thì diện tích giảm đi $68m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó.*

Câu 4. *Cho đường tròn (O; R) và dây cung BC với góc $\widehat{BOC} = 120^0$. Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại A*

a) Chứng tỏ ΔABC đều, tính cạnh của nó theo R

b) M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ (M khác B, C), tiếp tuyến tại M của (O) cắt AB, AC tại E và F. Tính chu vi của ΔAEF theo R, có nhận xét gì?

c) Chứng tỏ góc EOF không đổi khi M di động

d) Trường hợp M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$, chứng tỏ ΔAEF và ΔOEF là hai tam giác đều bằng nhau

Câu 5. *Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị là một số nguyên và tìm giá trị nguyên đó của phân thức:*

$$A = \frac{x^3 - 5x^2 + 9x - 2}{x - 3}$$

Giải

Câu 1.

a) Ta có: $\left(3 + \sqrt{5}\right)^2 = 9 + 5 + 6\sqrt{5} = 14 + \sqrt{36}.\sqrt{5} = 14 + \sqrt{180}$

$$\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = 8 + 6 + 4\sqrt{12} = 14 + \sqrt{16}.\sqrt{12} = 14 + \sqrt{192}$$

Vì $14 + \sqrt{180} < 14 + \sqrt{192}$ nên $3 + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

b) $P = \left(\sqrt{10} - \sqrt{6}\right).\sqrt{4 + \sqrt{15}}.\sqrt{4 + \sqrt{15}}.\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

$= \left(\sqrt{10} - \sqrt{6}\right).\sqrt{4 + \sqrt{15}}.\sqrt{\left(4 + \sqrt{15}\right)\left(4 - \sqrt{15}\right)}$

$= \sqrt{\sqrt{10} - \sqrt{6}}.\sqrt{\left(4 + \sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{6}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{10} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{6}\right)} = \sqrt{4} = 2$

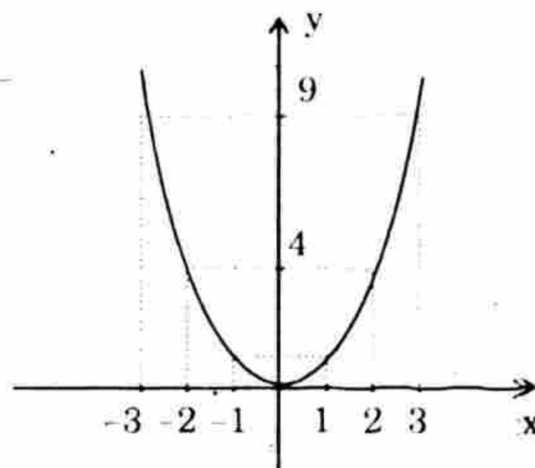
Câu 2.

a) Hàm số $y = x^2$ xác định với mọi giá trị $x \in R$. Với $x > 0$ hàm số đồng biến, với $x < 0$ hàm số nghịch biến.

Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	0	0	1	4	9

Đồ thị:



b) Phương trình đường thẳng có dạng: $y = ax + b$

Đường thẳng qua A nên:

$-1 = -a + b$ (1)

Đường thẳng qua B nên:

$4 = 2a + b$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được: $a = 1$; $b = 2$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = x + 2$.

c) Đường thẳng D song song với AB có dạng: $y = x + b$

(D) tiếp xúc với (P)nên ta có: $x^2 = x + b \Leftrightarrow x^2 - x - b = 0$ có nghiệm kép

Phương trình trên có nghiệp kép khi: $\Delta = 1 + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$.

Vậy phương trình đường thẳng D là: $y = x - \frac{1}{4}$

Câu 3. Gọi x (m), y (m) theo thứ tự là chiều dài, chiều rộng của thửa ruộng hình chữ nhật ($x > 2$, $y > 2$).

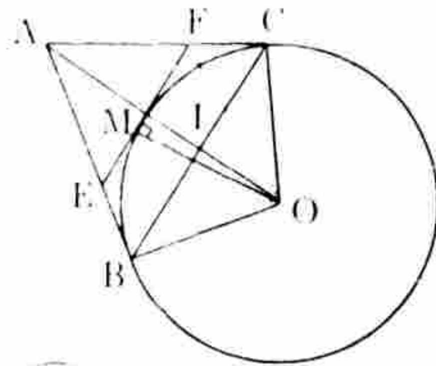
Diện tích của thửa ruộng là: x.y (m^2)

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x + 2)(y + 3) = xy + 100 \\ (x - 2)(y - 2) = xy - 68\end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $x = 26$, $y = 8$ (thỏa điều kiện).

Vậy diện tích của thửa ruộng là: $26.8 = 208m^2$.

Câu 4.



a) Ta có $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$

Nên tứ giác OBAC nội tiếp,

do đó $\widehat{BOC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

ΔABC cân tại A (do AB = AC theo tính chất tiếp tuyến) và có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên ΔABC là tam giác đều.

b) Theo tính chất tiếp tuyến vẽ từ E và F đến (O) ta có: EB = EM và FC = FM $\Rightarrow$ ME + MF = EB + FC

Với M nằm giữa E và F ta được: EF = EM + MF = EB + FC

Chu vi của tam giác AEF là: AE + AF + EF

$AE + AF + EF = AE + EB + AF + FC = AB + AC = 2AB = 2R\sqrt{3}$

Vậy chu vi tam giác AEF là $2R\sqrt{3}$ và không đổi khi M di động trên cung nhỏ BC.

c) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại E, ta có: $\widehat{EOM} = \frac{1}{2}\widehat{BOM}$

và $\widehat{MOF} = \frac{1}{2}\widehat{MOC}$. Do đó $\widehat{EOF} = \widehat{EOM} + \widehat{MOF} = \dfrac{\widehat{BOM} + \widehat{MOC}}{2} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$

Vậy $\widehat{EOF} = 60^\circ$, không đổi khi M di động.

d) Khi M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ ta có:

- EF // BC (vì cùng vuông góc với MO) $\Rightarrow \Delta AEF$ đều (vì $\Delta AEF \sim \Delta ABC$)
- ΔAEF đều có AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, nên OA là đường trung trực của EF

Do đó: OE = OF $\Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O, với $\widehat{EOF} = 60^\circ$ thì tam giác cân OEF là tam giác đều.

Vậy ΔAEF và ΔOEF là hai tam giác đều có cùng cạnh EF nên chúng bằng nhau

Câu 5. $A = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 9x - 2}{x - 3} = x^2 - 2x + 3 + \dfrac{7}{x - 3}$

A có giá trị nguyên khi $\dfrac{7}{x - 3}$ là nguyên, tức là phải có (x − 3) là ước của 7. Do đó:

$x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

$x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$

$x - 3 = -7 \Rightarrow x = -4$

$x - 3 = 7 \Rightarrow x = 10$

Vậy với $x \in \{-4; 2; 4; 10\}$ thì A là các số nguyên sau:

Với $x = -4 \Rightarrow A = 26$

Với $x = 2 \Rightarrow A = -4$

Với $x = 4 \Rightarrow A = 18$

Với $x = 10 \Rightarrow A = 84$

ĐỀ 5

Câu 1. *Cho biểu thức:* $A = x^2 - 3x\sqrt{y} + 2y$

a) *Phân tích A thành nhân tử*

b) *Tính giá trị của A khi* $x = \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2}$, $y = \dfrac{1}{9 + 4\sqrt{5}}$

Câu 2. *Rút gọn các biểu thức sau:*

a) $A = \dfrac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$; b) $B = cotgx + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

Câu 3. *Có hai thửa đất hình chữ nhật: thửa thứ nhất có chu vi là 240m, thửa thứ hai có chiều dài, chiều rộng hơn chiều dài, chiều rộng của thửa thứ nhất là 15m. Tính chiều dài, chiều rộng của mỗi thửa đất biết rằng tỉ số diện tích giữa thửa thứ nhất và thửa thứ hai là* $\dfrac{5}{8}$

Câu 4. *Giải các phương trình:*

a) $x^2 + 2\left(\sqrt{3} + 1\right)x + 2\sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{7 + \sqrt{2x}} = 3 + \sqrt{5}$

Câu 5. *Cho đường tròn (O), một đường kính AB cố định, một điểm I nằm giữa A và O sao cho* $AI = \dfrac{2}{3}AO$. *Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E*

a) *Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp*

b) *Chứng minh* $\Delta AME \backsim \Delta ACM$ *và* $AM^2 = AE.AC$

c) *Chứng minh* $AE.AC - AI.IB = AI^2$

d) *Xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔCME *nhỏ nhất*

Giải

Câu 1

a) $A = \left(x - \sqrt{y}\right)\left(x - 2\sqrt{y}\right)$

b) $x = \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2} = \dfrac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$

$y = \dfrac{1}{9 + 4\sqrt{5}} = \dfrac{9 - 4\sqrt{5}}{80 - 81} = 9 - 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} - 2\right)^2$

Vậy $A = \left[\sqrt{5} + 2 - \sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2}\right]\left[\sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2}\right] = 4\left(6 - \sqrt{5}\right)$

Câu 2

a) $A = \dfrac{1 + 2\sin x\cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}$

$= \dfrac{\left(\sin x + \cos x\right)^2}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$

b) $B = \text{cotg}x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{\cos x\left(1 + \cos x\right) + \sin^2 x}{\sin x\left(1 + \cos x\right)}$

$= \dfrac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\left(1 + \cos x\right)} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x\left(1 + \cos x\right)} = \dfrac{1}{\sin x}$

Câu 3. Gọi chiều dài, chiều rộng của thửa đất hình chữ nhật thứ nhất lần lượt là: x (m)

y (m) (x > y > 0) thì chiều dài, chiều rộng của thửa đất thứ hai là:

(x - 15) m, (y + 15) m

Chu vi của thửa đất thứ nhất là 240m thì nửa chu vi là 120m, nên ta có phương trình: $x + y = 120$ (1)

Diện tích của thửa thứ nhất là: $x.y$ (m^2)

Diện tích của thửa thứ hai là: $(x + 15)(y + 15)$

Theo đề bài ta có phương trình: $\dfrac{xy}{(x + 15)(y + 15)} = \dfrac{5}{8}$

Giải hệ phương trình trên ta được: $y_1 = 75$; $y_2 = 45$, suy ra $x_1 = 45$

$x_2 = 75$. Thử lại ta có kết quả:

Chiều dài, chiều rộng của thửa vườn thứ nhất là 75m ; 45m

Chiều dài, chiều rộng của thửa vườn thứ hai là 90m ; 60m

Câu 4.

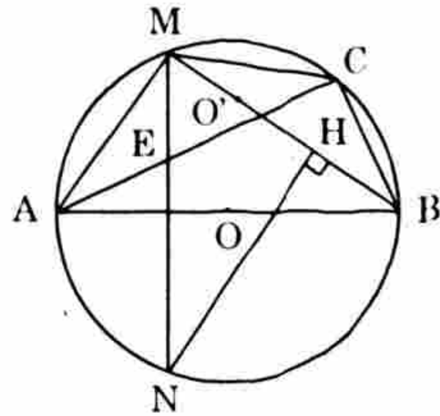
a) $x^2 - 2\left(\sqrt{3} + 1\right)x + 2\sqrt{3} = 0$. Ta có: $\Delta' = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - 2\sqrt{3} = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -\sqrt{3} + 1$; $x_2 = -\sqrt{3} - 3$

b) Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình đã cho ⇔ với: $7 + \sqrt{2x} = \left(3 + \sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = 7 + 6\sqrt{5}$

Giải phương trình trên kết hợp với điều kiện $x \geq 0$ ta được nghiệm: $x = 90,5 + 6\sqrt{5}$



Câu 5.

a) Ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{EIB} = 90^o$

Do đó tứ giác IECB nội tiếp trong đường tròn đường kính EB

b) Ta có: $\widehat{AEM} = \widehat{IEC}$ (đối đỉnh);

$\widehat{IEC} = \widehat{AMC}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AMC}$

Do đó: $\Delta AEM \sim \Delta ACM \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$

c) Trong tam giác vuông AMB có: $AI.IB = MI^2$

$\Rightarrow AE.AC - AI.IB = AM^2 - MI^2 = AI^2$

d) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCME, ta có: $AM^2 = AE.AC$

$\Rightarrow$ AM là tiếp tuyến của đường tròn (O') $\Rightarrow AM \perp O'M$ mà $AM \perp MB$

$\Rightarrow$ M, O', B thẳng hàng. Vẽ $NH \perp MB$, ta có: $NO' \geq NH$

Do đó NO' nhỏ nhất khi NO' = NH hay $O' \equiv H$

Vẽ đường tròn tâm H bán kính HM cắt đường tròn (O) tại C', đây chính là vị trí cần tìm của C để khoảng cách từ N đến O' nhỏ nhất

ĐỀ 6

Câu 1. *Giải các phương trình:*

a) $|2x - 1| = |2x - 3|$; *b)* $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8$

Câu 2.

a) Tính $A = -2\sqrt{3}\left(3 - \sqrt{3}\right) + \left(3\sqrt{3} + 1\right)^2$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \left(\dfrac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab} - b}\right)\left(a\sqrt{b} - b\sqrt{a}\right)$

Câu 3. *Cho hàm số* $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ *(P)*

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó hãy tìm hai điểm A và B

Câu 4. *Một xí nghiệp đóng giày dự định hoàn thành kế hoạch trong 26 ngày. Nhưng nhờ cải tiến kỹ thuật theo qui trình công nghệ mới nên mỗi ngày đã làm vượt mức 6000 đôi giày, do đó chẳng những đã hoàn thành kế hoạch đã định trong 24 ngày mà còn vượt mức 104.000 đôi giày. Tính số đôi giày phải làm theo kế hoạch*

Câu 5. *Cho đường tròn (O; R) đường thẳng d không đi qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M; N thuộc (O)). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K*

a) Chứng minh bốn điểm C, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh KN.KC = KH.KO.

c) Đoạn thẳng CO cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh I cách đều CM, CN, MN.

d) Một đường thẳng đi qua O song song với MN cắt tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF là nhỏ nhất

Giải

Câu 1.

a) $|2x - 1| = |2x - 3|$ (1)

Nhận xét rằng hai vế của phương trình (1) không âm nên ta phương hai vế: $(2x - 1)^2 = (2x - 3)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$

$\Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} + x = 8 \Leftrightarrow |x - 2| + x = 8$ (1)

- Nếu $x \geq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x - 2 + x = 8 \Leftrightarrow x = 5$
- Nếu $x < 2$ thì (1) $\Leftrightarrow 2 - x + x = 8$, vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 5$

Câu 2.

a) $A = -2\sqrt{3}\left(3 - \sqrt{3}\right) + \left(3\sqrt{3} + 1\right)^2 = -6\sqrt{3} + 6 + 27 + 6\sqrt{3} + 1 = 34$

b) $B = \left(\dfrac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b}\right)\left(a\sqrt{b} - b\sqrt{a}\right)$ (điều kiện $a > 0;\ b > 0;\ a \neq b$)

$$= \left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right]\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

$$= \frac{b-a}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}.\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = b - a$$

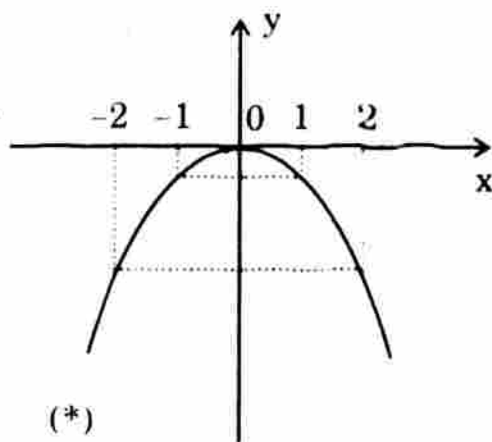
Câu 3.

a) Hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ xác định với mọi $x \in R$. Với $x > 0$ hàm số nghịch biến, với $x < 0$ hàm số đồng biến

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	$-\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	-2

Đồ thị:



b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x + m$ và (P) :

$$2x + m = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2m = 0 \qquad (*)$$

(P) cắt đường thẳng $y = 2x + m$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Vậy khi $m < 2$ thì đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt. Khi đó:

- $x_1 = -2 + \sqrt{\Delta'} \Rightarrow y_1 = 2\left(-2 + \sqrt{\Delta'}\right) + m = -4 + 2\sqrt{\Delta'} + m$, do đó:

  $A\left(-2 + \sqrt{\Delta'}\ ;\ -4 + 2\sqrt{\Delta'} + m\right)$

- $x_2 = -2 - \sqrt{\Delta'} \Rightarrow y_2 = 2\left(-2 - \sqrt{\Delta'}\right) + m = -4 - 2\sqrt{\Delta'} + m$, do đó:

  $B\left(-2 - \sqrt{\Delta'}\ ;\ -4 - 2\sqrt{\Delta'} + m\right)$

Câu 4. Gọi số đôi giày mà xí nghiệp dự định làm là x (x: nguyên dương)

Số đôi giày mỗi ngày dự định làm là: $\dfrac{x}{26}$ đôi

Vì đã làm vượt mức 104.000 đôi giày nên số đôi giày đã làm được là: (x + 104.000) và đã làm hoàn thành kế hoạch trong 24 ngày. Do đó mỗi ngày đã làm được $\dfrac{x + 104.000}{24}$ đôi giày

Do vượt mức 6000 đôi mỗi ngày nên có phương trình:

$\dfrac{x + 104.000}{24} - \dfrac{x}{26} = 6000$. Giải phương trình trên ta được x = 520.000

Thử lại kết quả thì số đôi giày xí nghiệp phải làm theo kế hoạch là: 520000 đôi.

Câu 5.

a) Ta có: $OH \perp AB$; $ON \perp CN$

$\Rightarrow \widehat{OHC} = \widehat{ONC} = 90^\circ$

Do đó tứ giác OCHM nội tiếp được, suy ra bốn điểm C, O, H, N cùng nằm trên đường tròn đường kính OC

b) Ta có: $\widehat{KON} = \widehat{KCH}$ (cùng bù với $\widehat{HON}$)

$\Rightarrow \Delta KON \sim \Delta KCH$

$\Rightarrow \dfrac{KO}{KC} = \dfrac{KN}{KH} \Rightarrow KO.KH = KN.KC$

c) CI là tia phân giác của $\widehat{MCN}$ và $CI \perp MN$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$

$\Rightarrow$ MI và NI lần lượt là các phân giác của $\widehat{CMN}$; $\widehat{CNM}$

Vậy I là giao điểm của các đường phân giác của tam giác CMN nên I cách đều các cạnh CM; CN; MN

d) Ta có: $S_{\Delta CEF} = 2.S_{\Delta COE} = CE.OM = (CM + ME)R$

$S_{\Delta CEF}$ nhỏ nhất khi CM + ME nhỏ nhất

Mặt khác: $CM.ME = OM^2 = R^2$ không đổi nên CM + ME nhỏ nhất khi và chỉ khi CM = ME = R

Do đó ΔCOE vuông cân tại O và ΔCOM vuông cân tại M

Suy ra : $MO = MC = R \Rightarrow OC = R\sqrt{2}$

Vậy C là giao điểm của đường tròn $(O; R\sqrt{2})$ với đường thẳng d

ĐỀ 7

Câu 1.

a) *Tính :* $\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}$

b) *Giải phương trình:* $\sqrt{x-4}=4-x$

Câu 2. *Cho Parabol* $y = kx^2$ *và đường thẳng* $y = (p-1)x - p + 1$

a) *Biết parabol đi qua điểm* $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ *và tiếp xúc với đường thẳng trên, hãy tìm k và q và tọa độ tiếp điểm Q*

b) *Viết phương trình đường thẳng QS biết tọa độ của S là (2; 0). Tìm hoành độ các giao điểm của đường thẳng QS với parabol*

Câu 3. *Hai người thợ máy cùng làm chung thì sau 12 giờ xong công việc. Sau khi làm chung 8 giờ thì một người phải đi làm việc khác nên người còn lại phải làm nốt trong 5 giờ nữa mới xong. Hỏi làm một mình thì mỗi người phải mất mấy giờ mới xong?*

Câu 4. *Cho đường tròn (O; R) và một điểm A với* $OA = R\sqrt{2}$*, một đường thẳng d quay quanh A cắt (O) tại M,N.Gọi I là trung điểm của đoạn MN :*

a) *Chứng tỏ* $OI \perp MN$*, suy ra I di động trên một cung tròn cố định với hai điểm giới hạn B, C thuộc (O)*

b) *Tính theo R độ dài AB,AC. Suy ra A,O,B,C là bốn đỉnh của hình vuông*

c) *Tính theo R diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đoạn AB, AC và cung nhỏ BC của (O)*

d) *Hãy chỉ ra vị trí của đường thẳng d tương ứng khi tổng AM + AN lớn nhất và chứng minh điều đó.*

Giải

Câu 1.

a) Tính: $\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{2}{2}=1$

b) Giải phương trình:

$$\sqrt{x-4}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=(4-x)^2 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=16-8x+x^2 \\ 4 \ge x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0 \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x \le 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4$

Câu 2.

a) Parabol $y = kx^2$ đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, ta có: $\frac{1}{4} = k.\frac{1}{4} \Rightarrow k = 1$

Vậy parabol có dạng $y = x^2$. Với $p - 1 \neq 0$ hay $p \neq 1$ thì phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol là:

$x^2 = (p - 1)x - (p - 1) \Leftrightarrow x^2 - (p - 1)x + p - 1 = 0$ (*)

Parabol tiếp xúc đường thẳng $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép, tức là:

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (p - 1)2 - 4(p - 1) = p^2 - 6p + 5 = 0$

$\Rightarrow p_1 = 1$ (loại) ; $p_2 = 5$. Khi đó $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{p-1}{2} = 2$

Vậy khi $k = 1$, $p = 5$ thì tọa độ tiếp điểm Q là (2; 4)

b) Đường thẳng QS có dạng $y = ax + b$ vì Q, S thuộc đường thẳng QS nên $\begin{cases} 4 = 2a + b \\ 0 = -2a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 2$

Vậy phương trình đường thẳng QS là: $y = \frac{1}{2}x + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng QS và parabol:

$x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -1,5$

Vậy hoành độ hai giao điểm là $x_1 = 2$ và $x_2 = -1,5$

Câu 3. Gọi số giờ mà người thứ nhất làm một mình xong công việc là x ($x > 0$)

Gọi số giờ mà người thứ hai làm một mình xong công việc là y ($y > 0$)

Trong một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc và cả hai cùng làm chung được $\frac{1}{12}$ công việc

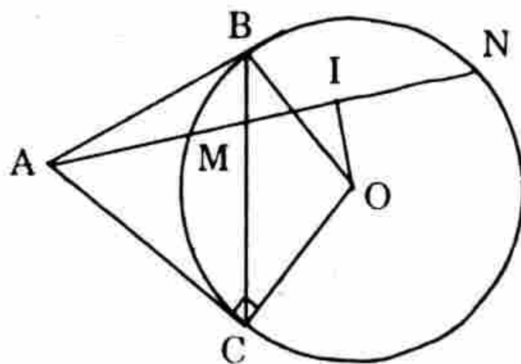
Cả hai làm chung trong 8 giờ được $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ công việc, nên phần công việc còn lại là $\frac{1}{3}$ công việc.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{y} \end{cases}$$. Giải hệ trên ta được y = 15; x = 60 (thỏa điều kiện)

Vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất phải làm trong 60 giờ, người thứ hai phải làm trong 15 giờ

Câu 4.

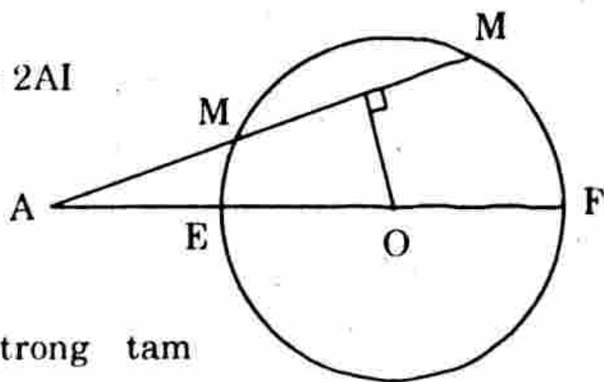


a) Đường kính đi qua trung điểm của dây cung thì vuông góc với dây cung đó, nên OI ⊥ MN
Điểm I nhìn đoạn AO cố định
Dưới góc 90° nên I chạy trên đường tròn đường kính AO
Cát tuyến AMN di động quanh A tới hai vị trí giới hạn là hai tiếp tuyến AB, AC. Vậy điểm I chạy trên cung BOC của đường tròn đường kính AO.

b) Xét tam giác vuông AOB có: $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{2R^2 - R^2} = R$
Tương tự, AC = R. Vì hai tam giác ABO và ACO đều là vuông cân nên dễ dàng suy ra ABOC là hình vuông

c) Gọi S là diện tích của tam giác cung giới hạn bởi các đọan AB, AC và cung nhỏ BC của (O). Khi đó ta có: $S = S_1 - S_2$
Với S_1 là diện tích hình vuông ABOC, S_2 là diện tích hình quạt OBC
Vậy $S = R^2 - \dfrac{\pi R^2}{4}$

d) Ta có: AM + AN = 2AM + MN
= 2(AM + MI) = 2AI



Kẻ đường kính đi qua A cắt đường tròn tại hai điểm E và F, theo trên ta có:
AE + AF = 2AO
Nếu d không trùng với AEF thì trong tam giác vuông AOI, ta có: AI < AO
⇒ AM + AN < AE + AF
Vậy tổng AM + AN lớn nhất khi d là đường thẳng đi qua tâm O

ĐỀ 8

Câu 1. *Cho hàm số* $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

a) *Tính* $f(2)$; $f(-3)$; $f(-\sqrt{3})$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

b) *Các điểm* $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$; $B(\sqrt{2}; 3)$; $C(-2; -6)$; $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{4}\right)$ *có thuộc đồ thị hàm số không ?*

Câu 2.

a) *Rút gọn biểu thức:* $A = \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}$

Với $a > 0$, $b > 0$ *và* $a \neq b$

b) *Giải phương trình:* $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 - \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2}$

Câu 3. *Hai bến sông A và B cách nhau 40km. Cùng một lúc chiếc canô xuôi dòng từ A đến B và một chiếc bè cũng trôi từ A đến B với vận tốc 3km/h. Sau khi đến B, canô quay về A ngay và gặp chiếc bè ở một địa điểm cách A là 8km. Tính vận tốc của canô*

Câu 4. *Cho tam giác ABC (AC > AB,* $\widehat{BAC} > 90^o$*); I, K theo thứ tự là các trung điểm AB, AC, các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E; tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F*

a) *Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.*

b) *Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp được.*

c) *Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.*

d) *Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp ΔAEF Hãy so sánh các đoạn thẳng DH, DE*

Giải

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

a) $f(2) = 6$; $f(-3) = 13,5$; $f(-\sqrt{3}) = 4,5$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3}$

b) • Với $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

• Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right) = 3 \Rightarrow$ Điểm $B\left(\sqrt{2}; 3\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

• Với $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 6 \Rightarrow$ Điểm $C(-2; -6)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

• Với $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow$ Điểm $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x^2$

Câu 2.

a) $$A = \frac{3\left(\sqrt{ab} - b\right)}{a - b} + \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}$$

$$= \frac{3\sqrt{b}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)} + \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}} = \frac{3\left(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}\right)}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}} = 3$$

b) $\left(1 - \sqrt{2}\right)x^2 - 2\left(1 - \sqrt{2}\right)x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$

$$\Delta' = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2} - \left(2\sqrt{2} - 5\right) = 8$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{\left(3\sqrt{2} + 1\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)} = -7 - 4\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}} = 1$$

Câu 3. Gọi x (km/h) là vận tốc của canô ($x > 3$) thì vận tốc của canô khi xuôi dòng từ A đến B là $(x + 3)$ (km/h), vận tốc của canô ngược dòng từ B đến A là $(x - 3)$ (km/h)

Thời gian canô đi từ A đến B là $\frac{40}{x + 3}$ (giờ)

Thời gian canô đi từ B đến khi gặp chiếc bè là: $\frac{40 - 8}{x - 3} = \frac{32}{x - 3}$ (giờ)

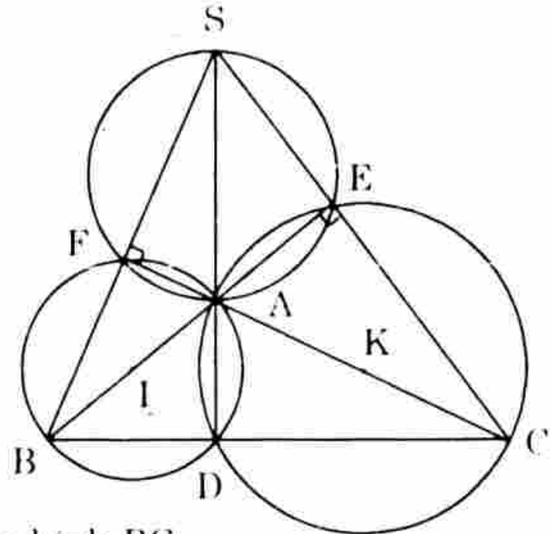
Thời gian chiếc bè trôi từ A đến khi gặp cano là: $\frac{8}{3}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{40}{x+3} + \frac{32}{x-3} = \frac{8}{3}$

Giải phương trình trên ta được: x = 27 (thỏa điều kiện)

Vậy vận tốc cano là 27 km/h

Câu 4.



a) Ta có: $\widehat{BDA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự: $\widehat{CDA} = 90^0$

Suy ra: $\widehat{BDC} = 180^0$.

Vậy B, D, C thẳng hàng

b) Ta có: $\widehat{BEC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Tương tự: $\widehat{BFC} = 90^0$

Vậy E, F nằm trên đường tròn đường kính BC

c) Giả sử BF cắt CE tại S.

Trong ΔBCS có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại A.

Suy ra AD là đường cao thứ ba, do đó AD đi qua đỉnh S

d) Tứ giác BDAF nội tiếp đường tròn nên $\widehat{FDA} = \widehat{FBA}$ (cùng chắn cung FA)

Tương tự ta có: $\widehat{EDA} = \widehat{ECA}$ (cùng chắn cung EA của đường tròn ngoại tiếp tứ giác DCEA)

Mặt khác tứ giác BFEC nội tiếp nên: $\widehat{FBA} = \widehat{ECA}$ (cùng chắn cung FE). Vậy $\widehat{FDA} = \widehat{EDA}$

Như vậy hai tia DF và DF đối xứng nhau qua đường thẳng chứa đường kính SD của đường tròn ngoại tiếp ΔAEF. Do đó E đối xứng với F hoặc với H. Điểm E không thể đối xứng với F (vì khi đó SB đối xứng với SC, do đó BD = CD => AB = AC, trái với giả thiết)

Do đó: DH = DE

ĐỀ 9

Câu 1. *Cho biểu thức:* $Q = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$

a) *Rút gọn Q*

b) *Tính giá trị Q biết* $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$

c) *Tìm giá trị x thỏa mãn:* $Q\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$

Câu 2. *Cho hàm số* $y = ax^2$ *có đồ thị (P) đi qua điểm A (-2; 4) và tiếp xúc với đồ thị (T) của hàm số* $y = (m-1)x - (m-1)$

a) *Tìm tọa độ tiếp điểm*

b) *Vẽ đồ thị (P) và (T) với a, m tìm được trên cùng một hệ trục tọa độ*

Câu 3. *Cho phương trình bậc hai đối với x*

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0 \qquad (m \neq -1) \quad (1)$$

a) *Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m*

b) *Gọi* x_1, x_2 *là nghiệm của (1) tìm m để* $x_1x_2 > 0$ *và* $x_1 = 2x_2$

Câu 4. *Cho đường tròn tâm O, đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B. (B≠C) và vẽ đường tròn O' đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. DC cắt đường tròn (O') tại I*

a) *Tứ giác ADBE là hình gì? Tại sao*

b) *Chứng minh ba điểm I, B, E thẳng hàng*

c) *Chứng minh rằng MI và tiếp tuyến của đường tròn (O') và* $MI^2 = MB.MC$

Giải

Câu 1. $Q = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$

a) Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$

$$Q = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right) : \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

b) $x = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} - 1$

Do đó: $Q = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1+1\right)^2}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$

c) $Q\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$ (Điều kiện $x \ge 4$)

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x+4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + \sqrt{x-4} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x}-2\right)^2 = 0\\ \sqrt{x-4} = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = 4$ (vì $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \ge 0$ và $\sqrt{x-4} \ge 0$)

Câu 2.

a) Vì (P) đi qua điểm $A(-2; 4)$ nên $4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1$

Đồ thị (T) tồn tại khi $m - 1 \ne 0 \Rightarrow m \ne 1$

Đồ thị (P) với $a = 1$ và đồ thị (T) tiếp xúc khi và chỉ khi phương trình: $x^2 = (m-1)x - (m-1)$ (*) có nghiệm kép

(*) $\Leftrightarrow x^2 - (m-1)x + (m-1) = 0$

$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-1) = m^2 - 6m + 5$

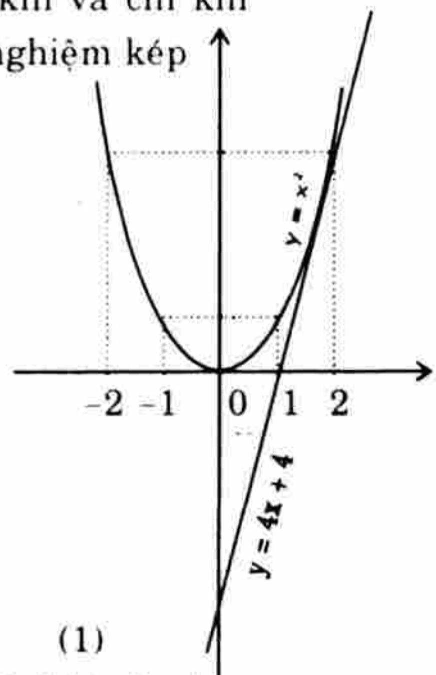
$\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$

$\Rightarrow m = 1$ (loại), $m = 5$

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m-1}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2$

Vậy với $a = 1$; $m = 5$ thì tọa độ tiếp điểm của (P) và (T) là (2; 4)

b) Đồ thị của (P) và (T) với $a = 1$, $m = 5$:



Câu 3.

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ $(m \ne -1)$ (1)

a) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' \ge 0$

$\Delta = \left[-(m-1)\right]^2 + (m+1)(m-3) = 4 \ge 0, \forall m$

Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, $\forall m$

$x_1.x_2 > 0$ khi: $\begin{cases}\Delta > 0\\ \dfrac{c}{a} > 0\end{cases} \Rightarrow \dfrac{m-3}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases}m > 3\\ m < -1\end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-3}{m+1} \end{cases}; \ 3x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{2(m-1)}{3(m+1)} \Rightarrow x_1 = \dfrac{3(m-3)}{m-1}$$

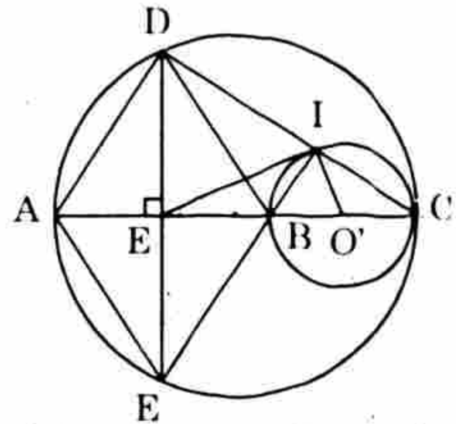
Ta có phương trình: $\dfrac{3(m-3)}{2(m-1)} = \dfrac{4(m-1)}{3(m+1)}$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m - 27 = 8m^2 - 16m + 8$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \\ m = -5 \end{array}\right.$

Vậy các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: m = 7; m = -5

Câu 4.



a) Ta có: $OA \perp DE \Rightarrow MD = ME$; $MA = MB$ nên tứ giác ADBE là hình bình hành

Hình bình hành ADBE có $DE \perp AB$, do đó ADBE là hình thoi

b) Ta có: $\widehat{ADC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BC)

nên $BI \perp DC$

Vậy AD // BI, AD // BE (vì ADBE là hình thoi), mà qua B ngoài AD chỉ dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với AD nên $BI \equiv BE$ hay B, E, I thẳng hàng.

c) Xét ΔEID có IM là trung tuyến nên MI = ME, do đó ΔMEI cân, suy ra $\widehat{MEI} = \widehat{MIE}$ (1)

Xét tam giác vuông MEB có: $\widehat{MEB} + \widehat{MBE} = 90^0$, mà $\widehat{MBE} = \widehat{IBO'}$

nên $\widehat{MEB} + \widehat{IBO'} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) có: $\widehat{IBO'} + \widehat{MIB} = 90^0$ (3)

Tam giác O'IB cân nên: $\widehat{IBO'} = \widehat{O'IB}$ (4)

Từ (3) và (4) có: $\widehat{MIB} + \widehat{O'IB} = \widehat{MIO'} = 90^0$, suy ra $MI \perp O'I$

$\Delta MIB \sim \Delta MCI$ (vì có $\widehat{M}$ chung và $\widehat{MIB} = \widehat{MIC}$) $\Rightarrow \dfrac{MI}{MC} = \dfrac{MB}{MI}$

$\Rightarrow MI^2 = MB.MC$ (đpcm)

ĐỀ 10

Câu 1. *Giải các phương trình và hệ phương trình sau:*

a) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

Câu 2. *Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m, nếu tăng chiều dài thêm 3m và tăng chiều rộng thêm 2m thì diện tích tăng thêm $45m^2$. Hãy tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn*

Câu 3. *Rút gọn các biểu thức sau:*

a) $P = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ với $x \geq 2$

b) $Q = \left(\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a - b) + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với $a \geq 0; b \geq 0$

Câu 4. *Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2r. C là trung điểm của cung AB. Trên cung AC lấy điểm F bất kì. Trên dây BF lấy điểm E sao cho BE = AF*

a) *Hai tam giác AFC và BEC quan hệ với nhau như thế nào? Tại sao?*

b) *Chứng minh EFC là tam giác vuông cân*

c) *Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn. Chứng minh BECD là một tứ giác nội tiếp*

d) *Giả sử F chuyển động trên cung AC. Chứng minh rằng khi đó E chuyển động trên một cung tròn. Hãy xác định cung tròn và bán kính cung tròn đó*

Giải

Câu 1. a) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$), phương trình đã cho tương đương với:

$4y^2 - 5y - 9 = 0$

Giải phương trình này, ta được: $y_1 = -1$ (loại) ; $y_2 = \dfrac{9}{4}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1 = \dfrac{3}{2}$; $x_2 = -\dfrac{3}{2}$.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 21 \\ 10x - 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = -26 \end{cases}$

Câu 2. Gọi chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là x (m), y (m) (0 < x, y < 17), ta có: x + y = 17 (1)

Nếu tăng chiều dài 3m và tăng chiều rộng 2m thì chiều dài, chiều rộng sẽ là (x + 3) (m), (y + 2) (m). Khi đó diện tích mảnh vườn tăng thêm $45m^2$, diện tích mảnh vườn khi chưa tăng thêm các cạnh là x.y (m^2), ta có: $(x + 3)(y + 2) - xy = 45$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được: x = 12, y = 5. Thử lại thấy thỏa điều kiện

Vậy chiều dài của mảnh vườn là 12m,chiều rộng của mảnh vườn là 5m

Câu 3.

a) $P = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}$

$\Leftrightarrow P^2 = x - \sqrt{x^2 - 4} + x + \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{\left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)}$

$= x + x + 2\sqrt{x^2 - x^2 + 4} = 2x + 4$

Vậy $P = \sqrt{2(x + 2)}$

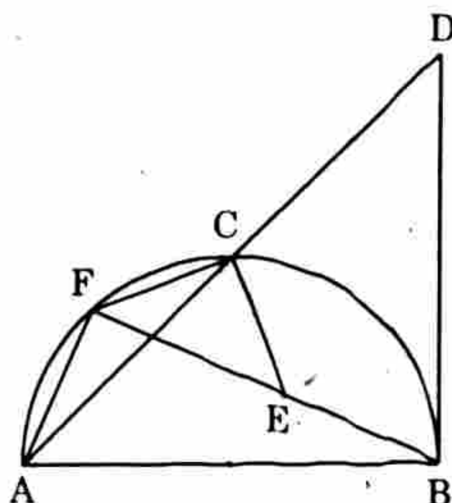
b) $Q = \left(\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a - b) + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ với $a \geq 0$; $b \geq 0$

$= \left[\dfrac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right] : (a - b) + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$= \left[\dfrac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right] : (a - b) + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$= (a - 2\sqrt{ab} + b) : (a - b) + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

$= \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 1$



Câu 4.

a) Vì C là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$ nên

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \Rightarrow AC = AB$

$\widehat{CAF} = \widehat{CBF}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FC}$)

Mặt khác: AF = BE (giả thiết)

Vậy $\Delta AFC = \Delta BEC$ (c.g.c)

b) Theo câu a) ta có: $CE = CF \Rightarrow \Delta ECF$ cân ở C

Vì $\widehat{CFE} = 45^o$ (vì cung CB bằng ¼ đường

tròn) = $\widehat{CEF}$, nên $\widehat{FCE} = 180^o - \left(\widehat{CFE} - \widehat{CEF}\right) = 180^o - 90^o = 90^o$

Do đó ΔECF vuông cân ở C

c) BD là tiếp tuyến nên $BD \perp AB \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^o$, vì $\widehat{DAB} = 45^o$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BC}$) nên $\widehat{ADB} = 45^o$; $\widehat{BEC} = \widehat{BEF} - \widehat{FEC} = 180^o - 45^o = 135^o$

Tứ giác BDEC có $\widehat{CDB} + \widehat{BEC} = 45^o + 135^o = 180^o$

Vậy tứ giác BDEC nội tiếp được đường tròn

d) Theo chứng minh trên thì E luôn luôn ở trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DCB. Vì $\widehat{DCB} = 90^o$ nên đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔDCB là DB

Biết rằng F chuyển động trên cung AC của nửa đường tròn đường kính AB nên khi $F \equiv A \Rightarrow E \equiv B$ và khi $F \equiv C$, do đó ta suy ra E chuyển động trên cung nhỏ BC của đường tròn đường kính BD

Vì tam giác ABD vuông tại B có $\widehat{ADB} = 45^o$ nện nó vuông cân, suy ra: BD = AB = 2r. Vậy E chuyển động trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BECD có bán kính bằng r.

ĐỀ 11

Câu 1. *Cho biểu thức:*

$$M = \frac{(1-x)^3(1-x)^2}{1+x^2} : \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x} + x\right)\left(\frac{1+x^3}{1-x} - x\right)\right] \quad \text{với } x \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức M

b) Tìm giá trị của x để $M = \frac{1}{5}$

c) Tính giá trị của M khi $|x - 5| = 4$

Câu 2. *Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị (D) và hàm số $y = kx^2$ có đồ thị (P)*

1) Tìm a, b biết rằng (D) đi qua A(–1; 3) và B(2; 0)

2) Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P)

Câu 3. *Một hợp kim đồng và kẽm trong đó có 5 gam kẽm. Nếu thêm 15 gam kẽm vào hợp kim này thì được một hợp kim mới mà trong hợp kim đó lượng đồng đã giảm so với lúc đầu là 30%. Tìm khối lượng ban đầu của hợp kim.*

Câu 4. *Cho phương trình: $x^2 - 4x\sqrt{3} + 8 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2. Không giải phương trình trên, hãy tính giá trị của biểu thức:*

$$M = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 3x_1^3x_2}$$

Câu 5. *Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định và một đường kính EF bất kì (E khác A và B). Tiếp tuyến tại B với đường tròn cắt tia AE, AF lần lượt tại H và K. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt HK tại M*

a) Chứng minh tứ giác AEBF là hình chữ nhật

b) Chứng minh tứ giác EFKH nội tiếp được trong đường tròn

c) Chứng minh AM là đường trung tuyến của ΔAHK

d) Gọi P, Q là các trung điểm tương ứng của HB và BK, xác định vị trí của đường kính EF để tứ giác EFQP có chu vi nhỏ nhất

Giải

Câu 1.

a) $$M = \frac{(1-x)^3(1+x)^2}{1+x^2} : \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x} + x\right)\left(\frac{1+x^3}{1-x} - x\right)\right]$$

$$= \frac{(1-x)^3(1+x)^2}{1+x^2} : \left[\frac{1-x^3+x(1-x)}{1-x} . \frac{1+x^3-x(1+x)}{1+x}\right]$$

$$= \frac{(1-x)^3(1+x)^2}{1+x^2} . \left[\frac{(1+x)^2.(1-x)^2}{1}\right] = \frac{1-x}{1+x^2}$$

b) Khi $M = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$

c) $|x - 5| = 4 \Leftrightarrow x = 9$

Thay giá trị x = 9 và biểu thức M đã được rút gọn ở câu a) ta được: $M = -\frac{4}{41}$

Câu 2.

1) Vì đường thẳng (D) đi qua hai điểm A(-1; 3) và B(2; 0) nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$. Giải ra ta được: a = -1; b = 2

Đường thẳng (D) là: y = -x + 2

2) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (D) và parabol (P):

$kx^2 = -x + 2 \Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0$ (với $k \neq 0$) (*)

(D) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép, tức là: $\Delta = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{8}$. Vậy phương trình (P) là $y = -\dfrac{1}{8}x^2$

Câu 3. Gọi x (kg) là khối lượng của hợp kim lúc đầu, thì khối lượng đồng có trong hợp kim lúc đầu là (x − 5) kg

Tỉ lệ đồng có trong hợp kim là: $\dfrac{x-5}{x}.100\%$

Khối lượng hợp kim lúc sau là: (x + 15) kg

Tỉ lệ đồng có trong hợp kim lúc sau là: $\dfrac{x-5}{x+15}.100\%$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\dfrac{x-5}{x}.100 - \dfrac{x-5}{x+15}.100 = 30$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 25$; $x_2 = 10$ (thoả điều kiện)

Vậy khối lượng của hợp kim lúc đầu là 25kg hoặc 10kg

Câu 4.

Theo định lý Viet ta có: $P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = 8$; $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 4\sqrt{3}$

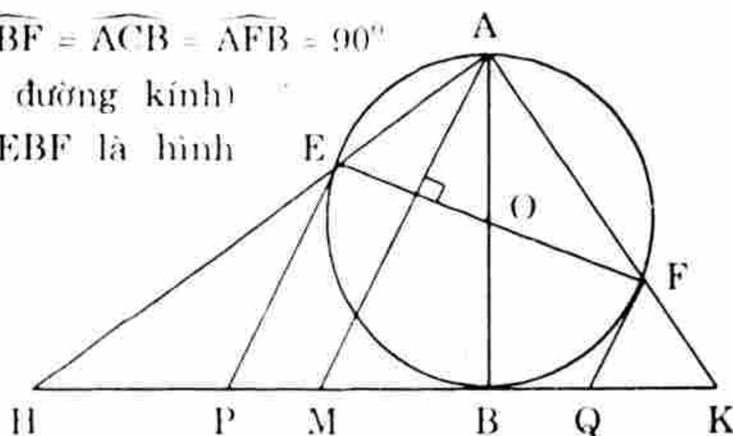
$$M = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2} = \frac{6\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2}{5x_1x_2\left(x_2^2 + x_1^2\right)}$$

$$= \frac{6\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2}{5x_1x_2\left[\left(x_2^2 + x_1^2\right) - 2x_1x_2\right]}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{6\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2.8}{5.8\left[\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2.8\right]} = \frac{6.16.3 - 16}{40\left(16.3 - 16\right)} = \frac{17}{80}$$

Câu 5.

a) Ta có: $\widehat{EAF} = \widehat{EBF} = \widehat{ACB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$ (do cùng chắn đường kính) nên tứ giác AEBF là hình chữ nhật



b) Ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{ABE}$ (cùng chắn cung AE)

$\widehat{ABE} = \widehat{BHA}$ (cùng phụ với góc HAB)

Suy ra: $\widehat{AEF} = \widehat{BHA}$, do đó tứ giác HEFH nội tiếp

c) Ta có: $\widehat{MAK} = \widehat{EFA} = 90^\circ$; $\widehat{MKA} = \widehat{MHA} = 90^\circ$ mà $\widehat{EFA} = \widehat{MHA}$, nên $\widehat{MAK} = \widehat{MKA}$, hay ΔMAK cân tại M

Suy ra tam giác HMA cân tại M

Vậy HM = AM = MK và AM là trung tuyến của ΔHAK

d) Nếu P là trung điểm của HB thì PE = PB (do ΔHEB vuông tại E)

Vậy $\Delta PEO = \Delta PBO$, suy ra $PE \perp EO$

Tương tự $QP \perp FO$. Tứ giác PEFQ là hình thang vuông có chu vi:

$$a = EF + PQ + (EP + FQ) = EF + 2PQ$$

Dễ thấy a bé nhất khi và chỉ khi PQ = EF. Khi đó $EF \perp AB$

$\Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$. Vậy phương trình của (P) là: $y = -\frac{1}{8}x^2$

ĐỀ 12

Câu 1. *Giải các phương trình và hệ phương trình sau:*

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ *b)* $4x^4 - 4x + 1 = 0$ *c)* $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

Câu 2. *Cho biểu thức:*

$$A = 1 : \left(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4-x} - \frac{2}{4-2\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{3x - 4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)} \right) \text{ với } x \neq 4$$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{20}$

Câu 3. *Tìm các kích thước của hình chữ nhật có diện tích* $40cm^3$*, biết rằng nếu tăng mỗi kích thước thêm 3cm thì diện tích tăng* $48cm^2$.

Câu 4. *Vẽ Parabol (P) :* $y = x^2$ *và đường thẳng (D):* $y = -x + 2$ *trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính*

Câu 5. *Cho* ΔABC *nội tiếp trong đường tròn (O) có AC > AB. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC, P là giao điểm của AB và CD. Tiếp tuyến của đường tròn tại C cắt tiếp tuyến của đường tròn tại D và cắt AD tại lần lượt E, Q*

a) Chứng minh DE//BC *b) Chứng minh PACQ nội tiếp được*
c) Chứng minh DE//PQ
d) Chứng minh rằng nếu F là giao điểm AD và BC thì: $\frac{1}{CE} = \frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF}$

Giải

Câu 1.

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ (*)

Đặt $X = x^2$ $(X \geq 0)$

(*) trở thành: $X^2 - 2X - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = 4 \\ X_2 = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Do đó: $x^2 = X_1 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2$; $x = -2$

Câu 2.

$$A = 1:\left(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4-x} - \frac{2}{4-2\sqrt{x}}\right).\left(\frac{3x-4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)}\right)$$

$$= 1:\left[\frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)} - \frac{2}{2\left(2-\sqrt{x}\right)}\right].\frac{3x-4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)}$$

$$= 1:\frac{2\left(2-\sqrt{x}\right) + \frac{3x}{2}.2 - 2\left(2+\sqrt{x}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}.\frac{3x-4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)}$$

$$= 1:\frac{4-2\sqrt{x}+3x-4-2\sqrt{x}}{2\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}.\frac{3x-4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)}$$

$$= 1:\frac{3x-4\sqrt{x}}{2\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}.\frac{3x-4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)}$$

$$= 1:\frac{2\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}{3x-4\sqrt{x}}.\frac{3x-4\sqrt{x}}{8\left(2+\sqrt{x}\right)^2\left(2-\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{4\left(2+\sqrt{x}\right)}$$

b) $A = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{4\left(2+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow 4\left(2+\sqrt{x}\right) = 20 \Leftrightarrow 2+\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$

Vậy $x = 9$ thoả $A = \frac{1}{20}$

Câu 3. Gọi x (cm), y (cm) là các kích thước của hình chữ nhật

Diện tích hình chữ nhật là: $xy = 40\ cm^2$ (1)

Khi tăng mỗi kích thước 3cm thì diện tích hình chữ nhật là:

$(x + 3)(y + 3)\ (cm^2)$

Theo đề bài, ta có: $(x + 3)(y + 3) - xy = 48 \Leftrightarrow x + y = 13$ (2)

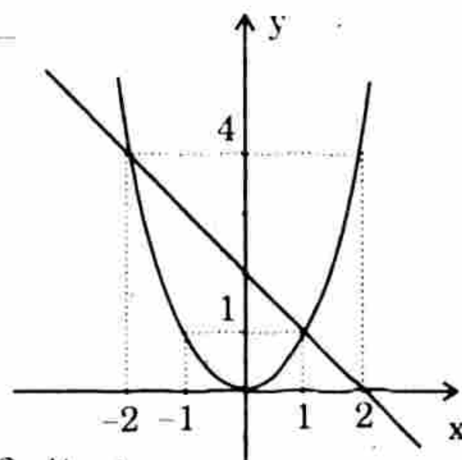
Giải hệ (1) và (2) ta được: $x = 8$; $y = 5$

Vậy các kích thước hình chữ nhật là: 8 (cm) và 5 (cm)

Câu 4.

Bảng giá trị:

x	−2	−1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = -x + 2$			2		0



Giao điểm của (P) và (D) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

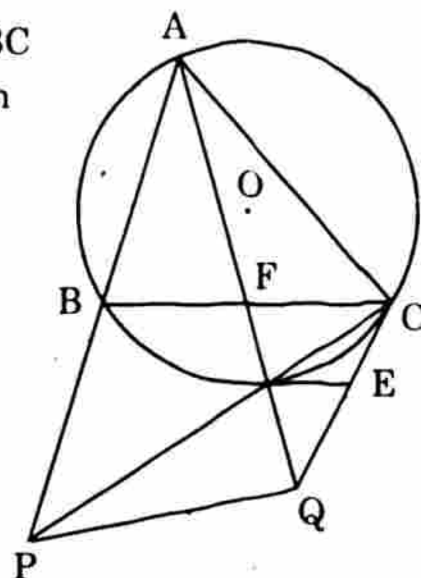
Suy ra: $y_1 = 1$; $y_2 = 4$

Vậy (D) cắt (P) tại hai điểm A(1; 1) và B(−2; 4)

Câu 5.

a) Dễ thấy $\widehat{CDE} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BD} = \widehat{BCD}$

Hai góc này ở vị trí so le trong nên DE//BC



b) Theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và một cát tuyến ta có:

$$\widehat{AQC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{AC} - \text{sđ } \overset{\frown}{DC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{AC} - \text{sđ } \overset{\frown}{BD}\right) = \widehat{APC}$$

Hai điểm P, Q cùng nhìn AC dưới một góc và ở về cùng một phía đối với AC nên chúng thuộc một đường tròn

c) Do tứ giác ACQP nội tiếp nên ta có:

$\widehat{CPQ} = \widehat{CAQ}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CQ}$) (1)

Mặt khác đối với đường tròn (O) ta có:

$\widehat{CDE} = \widehat{CAD}$ (cùng chắn $\widehat{CD}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{CPQ}$. Do đó DE//PQ

d) Ta có: $\frac{1}{CE} = \frac{1}{CQ} + \frac{1}{CF} \Leftrightarrow \frac{CE}{CQ} + \frac{CE}{CF} = 1$ (3)

Để chứng minh (3), ta nhận thấy do DE//BC và DE = EC nên:

$\frac{CE}{CF} = \frac{DE}{CF} = \frac{EQ}{QC}$. Từ đó: $\frac{CE}{CQ} + \frac{CE}{CF} = \frac{CE}{CQ} + \frac{EQ}{CQ} = 1$

ĐỀ 13

Câu 1. *Rút gọn các biểu thức sau:*

a) $P = \frac{x + 5 - 5\sqrt{x - 1}}{x - 1 - 3\sqrt{x - 1}}$

b) $Q = \frac{3\sqrt{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

Câu 2. *Xác định hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$ (d) trong các trường hợp:*

a) *Đồ thị của (d) là đường thẳng song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ và đi qua A(2; −2)*

b) *Đồ thị của (d) là đường thẳng cắt parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm có hoành độ các giao điểm là −1 và 3*

Câu 3. *Hai công nhân nếu làm chung thì hoàn thành một công việc trong 4 ngày. Người thứ nhất làm một nửa công việc, sau đó người thứ hai làm nốt nửa công việc còn lại thì toàn bộ công việc sẽ được hoàn thành trong 9 ngày. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc đó trong bao nhiêu ngày*

Câu 4. *Cho đường tròn (O) bán kính R, một dây AB cố định (AB < 2R) và một điểm bất kì M trên cung lớn AB (M khác A, B). Gọi I là trung điểm của dây AB và (O') lần lượt là đường tròn qua M, tiếp xúc AB tại A. Đường thẳng MI cắt (O), (O') lần lượt tại giao điểm thứ hai là N, P. Chứng minh rằng:*

a) $IA^2 = IP.IM$

b) *Tứ giác ANBP là hình bình hành*

c) *IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMBP*

d) Khi M di chuyển thì trọng tâm G của ΔPAB chạy trên một cung tròn cố định.

Câu 5. *Cho x, y là hai số thực thoả mãn: $(x + y)^2 + 7(x + y) + y^2 + 10 = 0$*

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + 1$

Giải

Câu 1.

a) Đặt $\sqrt{x-1} = a$ thì $x = a^2 + 1$, ta có:

$$P = \frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 3a} = \frac{(a-2)(a-3)}{a(a-3)} = \frac{a-2}{a-3} = \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}}$$

b) Đặt $\sqrt[3]{a} = x$, $\sqrt[3]{b} = y$ ta có:

$$Q = \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2 - x^2y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)}{x^2 + xy + y^2}$$

$$= x^2 + y^2 - xy = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}$$

Câu 2.

a) Vì (d) song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ nên $a = -3$

(d) đi qua $A(2; -2)$, ta có: $-2 = -3.2 + b \Rightarrow b = 4$

Vậy $a = -3$; $b = 4$ và (d): $y = -3x + 4$

b) Tọa độ giao điểm của (d) và parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ là: $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$; $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$

Ta có: $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$ nên (d) : $y = x + b$

Vì (d) đi qua $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ nên ta có: $\frac{1}{2} = -1 + b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Vậy $a = 1$; $b = \frac{3}{2}$ và (d) : $y = x + \frac{3}{2}$

Câu 3. Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất làm xong công việc ($x > 4$), thì thời gian để một mình người thứ nhất làm xong nửa công việc là $\frac{x}{2}$ (ngày)

Thời gian để người thứ hai làm xong một nửa công việc là $9 - \frac{x}{2}$ (ngày)

Do đó người thứ hai làm xong cả công việc trong

$$2\left(9 - \frac{x}{2}\right) = 18 - x \text{ (ngày)}$$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{18-x}=\frac{1}{4}$

Giải phương trình trên, ta được: $x_1 = 12$, $x_2 = 6$ (thỏa điều kiện)

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất làm xong công việc trong 12 ngày, người thứ hai làm xong công việc trong 6 ngày

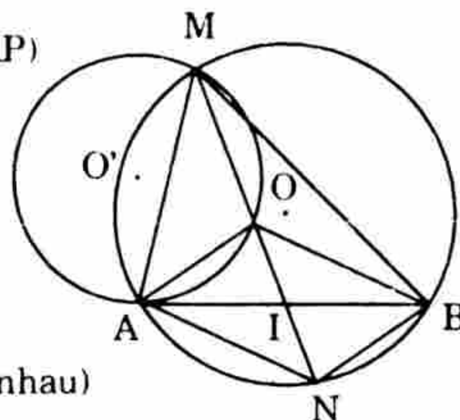
Câu 4.

a) Xét hai tam giác IAP và IMA có:

góc I chung và $\widehat{AMI}=\widehat{PAI}$ (vì cùng chắn AP)

Suy ra: $\Delta IAP \sim \Delta IMA$

Do đó: $\frac{IA}{IP}=\frac{IM}{IA} \Rightarrow IA^2 = IP.IM$ (đpcm)



b) Ta có: $\widehat{ABN}=\widehat{AMN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AN}$);

$\widehat{AMN}=\widehat{PAB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow$ AP // BN (có hai góc ở vị trí so le bằng nhau)

Ngoài ra: AI = BI nên AP = BN

Vậy APBN là hình bình hành

c) Giả sử Bx là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMPB. Khi đó: $\widehat{OBP}=\widehat{PMB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{PB}$)

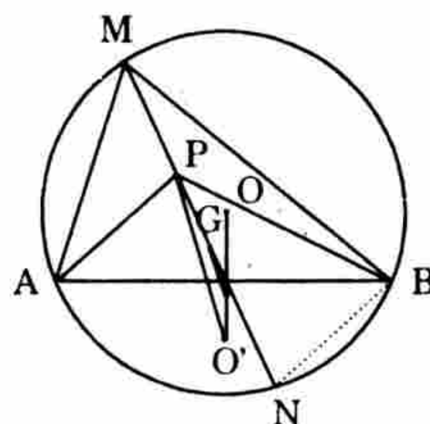
Mặt khác trong đường tròn (O), ta có:

$\widehat{PMB}=\widehat{NAB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{NB}$)

$\widehat{NAB}=\widehat{IBP}$ (do PB//AN)

Vậy $\widehat{xBP}=\widehat{IBP}$ và xB trùng với IB

Do đó IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMPB



d) Khi M di động trên cung lớn AB thì N di động trên cung nhỏ AB. Điểm P đối xứng với điểm N qua I nếu lấy điểm O' đối xứng với O qua I thì P chạy trên cung tròn (O'; R)

Trên IO' lấy điểm E sao cho $IE=\frac{IO'}{3}$. Do đó: $GE=\frac{PO'}{3}=\frac{R}{3}$

Vậy G chạy trên cung tròn $\left(E;\frac{R}{3}\right)$

Câu 5. Theo giả thiết ta có: $(x+y)^2+7(x+y)+y^2+10=0$

$\Rightarrow (x+y)^2+2.(x+y)^2.\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+10=-y^2\le 0$

$$\left(x+y+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\le 0 \Leftrightarrow \left(x+y+\frac{7}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left|x+y+\frac{7}{2}\right|\le\frac{3}{2} \text{ hay } -\frac{3}{2}\le x+y+\frac{7}{2}\le\frac{3}{2}\Rightarrow -4\le P=x+y+1\le -1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -4 và giá trị lớn nhất của P là -1

ĐỀ 14

Câu 1. *Giải phương trình và hệ phương trình sau:*

a) $|2x-1|=|2x-3|$ *b)* $\sqrt{x^2-4x+4}+x=8$ *c)* $\begin{cases}4x+3y=1\\2x-3y=5\end{cases}$

Câu 2. *Cho biểu thức:* $Q=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{2}{a-1}\right)$

a) Rút gọn Q

b) Tính giá trị của Q khi $a=3+2\sqrt{2}$

c) Tìm giá trị của a sao cho $Q<0$

Câu 3. *Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật nên tổ I đã vượt mức kế hoạch 18% và tổ hai đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian qui định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao mỗi tổ theo kế hoạch là bao nhiêu?*

Câu 4.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng (d) đi qua điểm O(0; 0) và điểm $A\left(\frac{1}{2};-2,5\right)$

b) Hỏi rằng đường thẳng (d) là độ thị hàm số nào?

Câu 5. *Cho* ΔABC *có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi BD, CE là hai đường cao của* ΔABC

a) Chứng tỏ 4 điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tron, xác định tâm I của đường tròn này và chứng minh $OI\perp BC$

b) Chứng minh: AD.AC = AE.AB

c) Gọi (d) là tiếp tuyến tại A của (O), chứng minh DE//(d)

d) Gọi K là trung điểm DE, chứng minh rằng hai đường thẳng d và IK vuông góc nhau

Giải

Câu 1.

a) $|2x - 1| = |2x - 3|$ (1)

Dễ thấy hai vế của (1) không âm, nên ta có:

(1) $\Leftrightarrow |2x - 1|^2 = |2x - 3|^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1$

b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2} + x = 8 \Leftrightarrow |x - 2| + x = 8$ (2)

- Nếu $x \geq 2$ thì: (2) $\Leftrightarrow x - 2 + x = 8 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$
- Nếu $x < 2$ thì: (2) $\Leftrightarrow 2 - x + x = 8$, vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 5$

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1; -1)$

Câu 2.

a) $Q = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \dfrac{1}{a - \sqrt{a}}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{a} + 1} - \dfrac{2}{a - 1}\right)$, Điều kiện $a > 0$; $a \neq 1$

$$= \left(\frac{a - 1}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - 1\right)}\right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{a - 1}\right) = \frac{a - 1}{\sqrt{a}}$$

b) $a = 3 + 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2} + 1$

Vậy $Q = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 2$

c) Với $a > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > 0$. Do đó $Q = \dfrac{a - 1}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1$

Vậy $Q < 0$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$

Câu 3. Gọi x là số sản phẩm tổ I hoàn thành theo kế hoạch $(0 < x < 600)$

Số sản phẩm mà tổ II hoàn thành theo kế hoạch là $600 - x$

Số sản phẩm vượt mức của tổ I là: $\dfrac{18x}{100}$

Số sản phẩm vượt mức của tổ II là: $\dfrac{(600 - x).21}{100}$

Theo đề bài, ta có phương trình: $\dfrac{18x}{100} + \dfrac{(600 - x)21}{100} = 120$

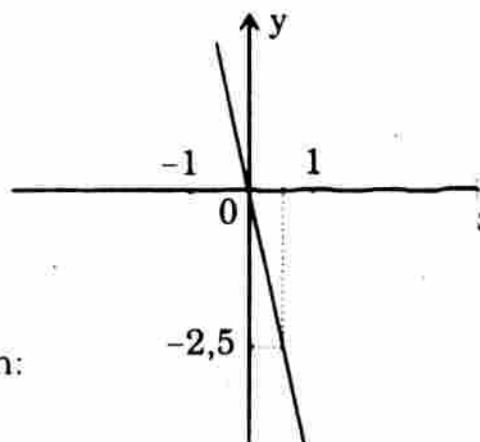
Giải phương trình trên, ta được: $x = 200$

Vậy số sản phẩm theo kế hoạch của tổ I là 200 sản phẩm, số sản phẩm theo kế hoạch của tổ II là 400 sản phẩm

Câu 4.

a) Dựng điểm $A\left(\frac{1}{2}; -2,5\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm O(0; 0) và $A\left(\frac{1}{2}; -2,5\right)$ như hình vẽ

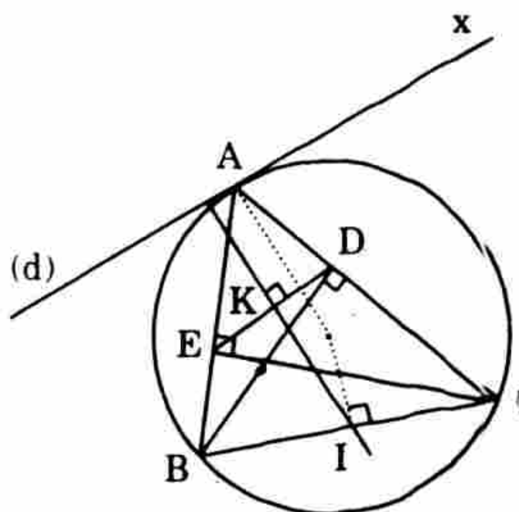


b) Đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ nên có phương trình: y = ax

Vì điểm A thuộc đường thẳng (d) nên:

$\frac{1}{2}a = -2,5 \Rightarrow a = -5$. Vậy (d) : y = –5x

Câu 5:



a) Hai điểm D và E cùng nhìn BC dưới góc vuông nên 4 điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC và có tâm I là trung điểm BC

Tam giác OBC cân (OB = OC = R)

Nên trung tuyến OI cũng là đường cao nên: OI ⊥ BC

b) $\Delta ABD \sim \Delta ACF$ (vì có góc nhọn $\widehat{A}$ chung và $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$), suy ra: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AB.AE = AD.AC$

c) Tại đỉnh D của tứ giác BEDC nội tiếp:

$\widehat{ADE}$ là góc ngoài và $\widehat{BEC}$ là góc đối diện với góc trong $\widehat{EDC}$ nên $\widehat{ADE} = \widehat{EBC}$ (cùng bù với $\widehat{EDC}$)

Ta lại có: $\widehat{ABC} = \widehat{CAx}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AC}$ và góc giữa tia tiếp tuyến Ax và dây cung AC có số đo bằng $\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$)

Suy ra: $\widehat{ADE} = \widehat{DAx}$. Hai góc này ở vị trí so le trong nên DE // (d)

d) Ta có: ΔIDE cân tại I (vì ID và IE là bán kính của đường tròn (I))

nên trung tuyến IK cũng là đường cao: IK ⊥ DE

Ta lại có: (d) // DE (theo chứng minh trên)

Vậy đường thẳng IK vuông góc với (d)

ĐỀ 15

Câu 1. *Cho biểu thức:* $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Rút gọn P *b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$*

c) Tìm các giá trị của x để $P = -2$

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\dfrac{5}{x^2 - 4x + 5} - x^2 + 4x + 1 = 0$

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 đường thẳng có phương trình:

$(d_1): y = \dfrac{1}{2}x + 4$; $(d_2): y = 2$ và $(d_3): y = (k+1)x + k$

Tìm k để 3 đường thẳng đã cho đồng quy

Câu 3. *Một phòng họp có 360 chỗ ngồi và được chia thành các dãy có số chỗ ngồi bằng nhau. Nếu thêm cho mỗi dãy 4 chỗ ngồi và bớt đi 3 dãy thì số chỗ ngồi trong phòng họp không thay đổi. Hỏi ban đầu số chỗ ngồi trong phòng họp được chia thành bao nhiêu dãy ?*

Câu 4. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O) và điểm E là điểm chính giữa cung AB. Hai dây EC, ED cắt AB theo thứ tự tại P, Q. Các dây AD và EC kéo dài cắt nhau tại I. Các dây BC và ED cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:*

a) Tứ giác CDIK nội tiếp

b) Tứ giác CDQP nội tiếp

c) IK // AB

d) Đường tròn ngoại tiếp ΔAQD tiếp xúc với EA tại A

Câu 5. *Cho hai số a và b khác 0 thỏa mãn:* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$. *Chứng minh rằng phương trình ẩn x sau luôn có nghiệm:*

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$$

Giải

Câu 1.

a) $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$ Điều kiện: $x > 0$, $x \neq 1$

$$P = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left[\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2 - \left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x-1}\right] = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \left(\frac{-4\sqrt{x}}{x-1}\right) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

b) $P = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ (vì $\sqrt{x} > 0$) $\Leftrightarrow x < 1$. Vậy $P > 0$ khi $x < 1$

c) $P = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} = -2 \Leftrightarrow 1 - x = -2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$ (vì $1 - \sqrt{2} < 0$)

Câu 2.

a) $\dfrac{5}{x^2 - 4x + 5} - x^2 + 4x - 1 = 0$ (1)

Đặt $x^2 - 4x + 5 = t$, khi đó: (1) trở thành: $\dfrac{5}{t} - (t - 4) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$ Hay: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 5 = -1 \\ x^2 - 4x + 5 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 0$; $x = 4$

b) (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm có tọa độ: $\dfrac{1}{2}x + 4 = 2 \Rightarrow I(-4; 2)$

(d_3) đi qua $I(-4; 2)$ khi: $2 = (k + 1)(-4) + k \Rightarrow k = -2$

Vậy với $k = -2$ thì 3 đường thẳng (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy

Câu 3. Gọi x là số dãy ghế trong phòng lúc đầu (x nguyên và $x > 3$), thì $(x - 3)$ là số dãy ghế lúc sau

Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc đầu: $\dfrac{360}{x}$ (chỗ)

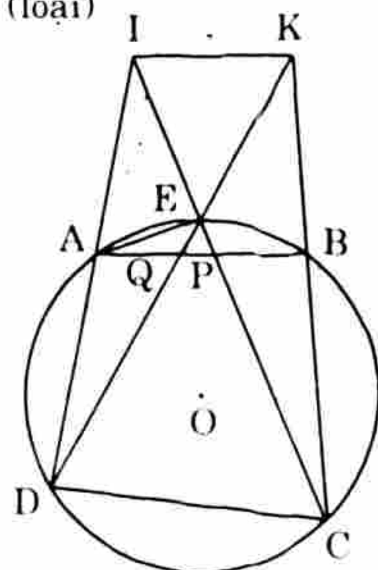
Số chỗ ngồi trên mỗi dãy lúc sau: $\dfrac{360}{x-3}$ (chỗ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\dfrac{360}{x-3} - \dfrac{360}{x} = 4$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 18$; $x_2 = -15$ (loại)

Vậy trong phòng có 18 dãy ghế

Câu 4.



a) Ta có: $\widehat{CKD} = \dfrac{1}{2}(\text{Sđ } \overset{\frown}{DC} - \text{Sđ } \overset{\frown}{EB})$;

$\widehat{CID} = \dfrac{1}{2}(\text{Sđ } \overset{\frown}{DC} - \text{Sđ } \overset{\frown}{AE})$

Vì $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{EB}$ nên $\widehat{CKD} = \widehat{CID}$

Do đó tứ giác CDIK nội tiếp

b) Tứ giác CDQP nội tiếp khi và chỉ khi:

$\widehat{DCE} + \widehat{DQP} = 180^0$ hay $\widehat{DCE} = \widehat{EQB}$

Ta có: $\widehat{EQB} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AD} + sđ\overset{\frown}{BE}\right) = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AD} + sđ\overset{\frown}{AE}\right) = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{DE} = \widehat{DCE}$

Vậy tứ giác CDQP nội tiếp

c) Theo câu a) ta có: $\widehat{IKD} = \widehat{ICD}$ (cùng chắn ID)

Và theo chứng minh câu b) ta có: $\widehat{ICD} = \widehat{KQB}$ (cùng bù với góc DQB)

Vậy $\widehat{IKD} = \widehat{KQB}$ ⇒ IK // AB (có hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau)

d) Ta có: $\widehat{IDK} = \widehat{EAB}$ (chắn hai cung bằng nhau)

Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (AQD), ta có: $\widehat{BAx} = \widehat{IDK}$

Từ đó $\widehat{BAx} = \widehat{EAB}$, nên Ax ≡ AE, hay AE là tiếp tuyến của đường tròn (AQD)

Câu 5. Xét phương trình: $(x^2 + ax + b) = 0$ có $\Delta_1 = a^2 - 4b$

Xét phương trình: $(x^2 + bx + a) = 0$ có $\Delta_2 = b^2 - 4a$

Do đó: $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a + b)$ mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a + b) = ab$

$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a + b) = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$

Từ đó suy ra có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Vậy phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a) = 0$ luôn có nghiệm

ĐỀ 16

Câu 1

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1\right)$

a) Rút gọn A *b) Tính giá trị A khi* $x = \sqrt{3} + 2$

Câu 2. *Cho Parabol (P) :* $y = \frac{x^2}{2}$ *và đường thẳng (d) :* $y = x + b$

a) Với giá trị nào của b thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B ?

b) Trong trường hợp b = 4, tìm toạ độ của A và B. Tính khoảng cách AB

Câu 3. *Giải các phương trình và hệ phương trình sau:*

a) $4x^2 - 5x - 9 = 0$ *b)* $\frac{\sqrt{2x - 3}}{\sqrt{x - 1}} = 2$ *c)* $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

Câu 4. *Hai thành phố A và B cách nhau 120km. Lúc 7 giờ sáng một ôtô khởi hành từ A để đi B. Đi được* $\frac{2}{3}$ *quãng đường thì xe hỏng máy*

phải dừng lại sửa mất 20 phút rồi lại tiếp tục đi nhưng với vận tốc ít hơn vận tốc dự định 8 km/h và đến B lúc 10 giờ. Hỏi ôtô hỏng lúc mấy giờ ?

Câu 5. *Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Đường kính AC của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai E. Đường kính AD của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F*

a) Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp

b) Chứng minh C, B, D thẳng hàng và tứ giác OO'EF nội tiếp

c) Với điều kiện và vị trí nào của hai đường tròn (O) và (O') thì EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O')

Giải

Câu 1.

a) $$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}\left(x - \sqrt{3}\right) + 3}{x^3 - \left(\sqrt{3}\right)^3}\right)\left(\frac{x^2 + 3 + \sqrt{3}x}{x\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{x - \sqrt{3}}$$

b) $A = \dfrac{1}{x - \sqrt{3}}$ với $x = \sqrt{3} + 2 \Rightarrow A = \dfrac{1}{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$

Câu 2.

a) Phương trình hoành độ giao điểm củam (d) và (P):

$$\frac{x^2}{2} = x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2b = 0 \qquad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm phân biệt, tức là: $\Delta' = 1 + 2b > 0 \Leftrightarrow b > -\dfrac{1}{2}$

b) Khi b = 4, (*) trở thành: $x^2 - 2x - 8 = 0$ (**)

Giải (**) ta được: $x = 4$; $x = -2$

Thay vào phương trình (d) : $y = x + 4$ ta được hai điểm A(4; 8); B(-2;2) cần tìm

Khoảng cách AB là: $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$

Câu 3.

a) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

Đặt $y = x^2 \geq 0$ (*) suy ra : $4y^2 - 5y - 9 = 0$

Giải ra ta được: $y_1 = -1$ (loại); $y_2 = \frac{9}{4}$

Thay $y_2 = \frac{9}{4}$ vào (*) ta được: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{3}{2}$

b) Điều kiện: $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $\frac{2x - 3}{x - 1} = 4$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = 4(x - 1) \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm (–1; 5; –26)

Câu 4. Gọi vận tốc dự định của ôtô là x km/giờ (x > 8) thì vận tốc của ôtô sau khi hỏng máy là x – 8 km/giờ

Thời gian ôtô chạy $\frac{2}{3}$ quãng đường với vận tốc dự định là $\frac{80}{x}$ (giờ)

Thời gian ôtô chạy quãng đường còn lại với vận tốc x – 8 km/giờ là $\frac{40}{x-8}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{80}{x} + \frac{1}{3} + \frac{40}{x - 8} = 3$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 48$, $x_2 = 5$ (loại vì x > 8)

Do đó thời gian ôtô đi $\frac{2}{3}$ quãng đường là $\frac{80}{48}$ giờ = 1 giờ 40 phút và ôtô hỏng máy lúc 7 giờ + 1 giờ 40 phút = 8 giờ 40 phút

Câu 5.

a) Ta có: $\widehat{CFA} = \widehat{DEA} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hai điểm E, F cùng nhìn CD dưới một góc vuông nên tứ giác CDEF nội tiếp trong đường tròn đường kính CD

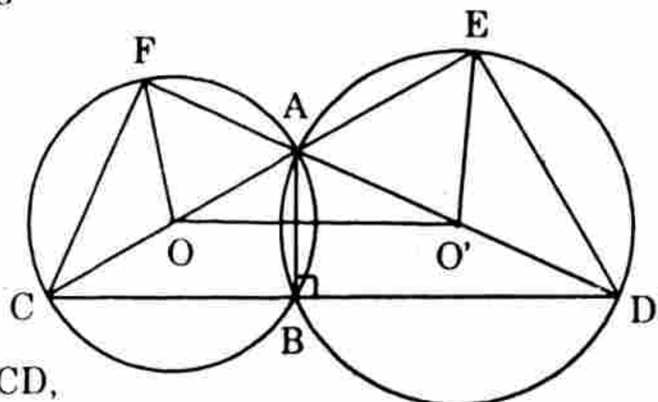
b) • Với đường tròn (O) ta có: $\widehat{CBA} = 90^o$

• Với đường tròn (O') ta có: $\widehat{DBA} = 90^o$

Suy ra: $\widehat{CBA} + \widehat{DBA} = 180^o$

Do đó C, B, D thẳng hàng

• Với đường tròn đường kính CD,



Ta có: $\widehat{EFD} = \widehat{ECD}$ (cùng chắn cung ED)

Mặt khác: $\widehat{ECD} = \widehat{EOO'}$ (đồng vị)

Suy ra: $\widehat{EFD} = \widehat{EOO'}$. Do đó tứ giác OO'EF nội tiếp được

c) Khi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') thì:

$OF \perp EF$; $OE' \perp EF \Rightarrow \widehat{OFE} = \widehat{O'EF} = 90^0$

Mà tứ giác OO'EF nội tiếp nên: $\widehat{FOO'} = \widehat{EOO'} = 90^0$

Suy ra tứ giác OO'EF là hình chữ nhật, do đó OF = O'E = R (1)

Và AF = AE = AO = AO' = R $\Rightarrow OO' = R\sqrt{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai đường (O) và (O') bằng nhau và có đoạn nối tâm $OO' = R\sqrt{3}$

ĐỀ 17

Câu 1. *Cho biểu thức:* $P = \left(\dfrac{2a+1}{a\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a}-1}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$

a) Rút gọn P *b) Tìm a để* $P.\sqrt{1-a} < 0$

Câu 2. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) :* $y = \dfrac{x^2}{4}$ *và đường thẳng (d) :* $y = mx + n$. *Tìm các giá trị của m, n biết đường thẳng (d) thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

a) Song song với đường thẳng $y = x$ *và tiếp xúc với parabol (P)*

b) Đi qua điểm $A\left(\dfrac{3}{2}; -1\right)$ *và tiếp xúc với parabol (P). Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (d) trong mỗi trường hợp trên*

Câu 3. *Một ôtô dự định từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 50km/giờ. Sau khi đi được* $\dfrac{2}{3}$ *quãng đường với vận tốc đó, vì đường ghồ ghề nên người lái xe phải giảm vận tốc mỗi giờ 10km trên quãng đường còn lại. Do đó ôtô đến tỉnh B chậm 30 phút so với dự định. Tính quãng đường AB*

Câu 4. *Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính R và r (R > r) tiếp xúc ngoài tại P. Gọi PM và PN là hai đường kính của (O) và (O'). Dây QS của (O) vuông góc với MN tại trung điểm H của MN, QP kéo dài cắt (O') tại K*

a) Tứ giác MNQS là hình gì?

b) Chứng minh ba điểm S, K, N thẳng hàng

c) QN cắt (O') tại I, chứng minh QK, SI và MN đồng quy

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O')

Câu 5. *Phân tích thành nhân tử biểu thức sau:*

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$$

Giải

Câu 1.

a) Điều kiện: $a > 0$; $a \neq 1$ (*)

Đặt $P = A.B$

Khi đó: $A = \left(\dfrac{2a+1}{a\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right) = \dfrac{2a+1-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{a}-1}$

$B = \left(a - \sqrt{a} + 1\right) - \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}-1\right)^2$

$\Rightarrow P = A.B = \dfrac{1}{\sqrt{a}-1}.\left(\sqrt{a}-1\right)^2 = \sqrt{a} - 1$

b) Điều kiện để $\sqrt{1-a}$ có nghĩa là: $a \leq 1$

Kết hợp với (*) ta có: $0 < a < 1$ nên $\sqrt{a} < 1 \Rightarrow P = \sqrt{a} - 1 < 0$

Mà $\sqrt{1-a} > 0$ nên $P.\sqrt{1-a} < 0$

Câu 2.

a) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x$ nên $m = 1$, ta có: $y = x + n$. Đường thẳng $y = x + n$ tiếp xúc với parabol (P) khi và chỉ khi phương trình: $\dfrac{x^2}{4} = x + n \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4n = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + 4n = 0 \Leftrightarrow n = -1$

Khi đó: $x_1 = x_2 = 2$, từ đó $y = 1$. Tọa độ tiếp điểm của (d) và (P) là (2;1)

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A\left(\dfrac{3}{2};1\right)$ nên: $-1 = \dfrac{3}{2}m + n$

$\Rightarrow n = -1 - \dfrac{3}{2}m \Rightarrow y = mx - 1 - \dfrac{3}{2}m$

Đường thẳng $y = mx - 1 - \dfrac{3}{2}$ tiếp xúc parabol (P) khi và chỉ khi phương trình: $\dfrac{x^2}{4} = mx - 1 - \dfrac{3}{2}m \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 6m + 4 = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 6m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2;\ m = -\dfrac{1}{2}$

Với m = 2, ta có x = 4; y = 4. Tọa độ tiếp điểm là (4; 4)

Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có $x = -1$; $y = \frac{1}{4}$. Tọa độ tiếp điểm là $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$

Câu 3. Gọi x (km) là độ dài quãng đường AB (x > 0)

Thời gian dự định của ôtô đi từ A đến B là: $\frac{x}{50}$ (giờ)

Thời gian ôtô đi $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu là: $\frac{2x}{3} : 50 = \frac{x}{75}$ (giờ)

Thời gian ôtô đi $\frac{1}{3}$ quãng đường còn lại là: $\frac{x}{3} : 40 = \frac{x}{120}$ (giờ)

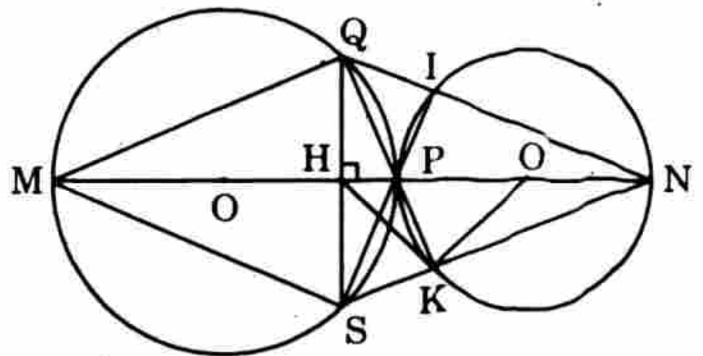
Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{x}{75} + \frac{x}{120} - \frac{x}{50} = \frac{1}{2}$

Giải phương trình trên ta được: x = 300 (thỏa điều kiện)

Vậy quãng đường AB là 300 km

Câu 4.

a) Ta có tứ giác MNQS là hình bình hành vì hai đường chéo MN và QS cắt nhau tại trung điểm H của mỗi đường.
Mặt khác QS ⊥ MN tại H, suy ra tứ giác MNQS là hình thoi



b) Theo câu a) thì NS // MQ

Nối NK có $\widehat{MQK} = \widehat{NKP} = 90^o$ (vì các tam giác MQP và NKP vuông do đó có trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

Suy ra: NK//MQ

Vậy NS // MQ và NK // MQ mà qua N chỉ có một đường thẳng duy nhất song song với MQ. Do đó ba điểm S, K, N thẳng hàng

c) Ta có: PI ⊥ QN và SP ⊥ QN. Nhưng qua P chỉ có một đường thẳng vuông góc duy nhất với QN. Do đó ba điểm S, P, I phải thẳng hàng

Vậy ba đường thẳng QK, SI và MN phải đồng quy tại P và P là trực tâm của ΔQSN

d) Xét tam giác vuông QKS có KM là trung tuyến nên ΔKHS cân

Do đó: $\widehat{QSN} = \widehat{HKS}$. Lại có $\widehat{PNS} = \widehat{O'KN}$, mà $\widehat{QSN} + \widehat{PNS} = 90^o$ nên: $\widehat{KHS} + \widehat{O'KN} = 90^o \Rightarrow \widehat{HKO'} = 90^o$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O')

Câu 5.

$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2ab$

$= [ab(a + b) + abc] + [bc(b + c) + abc] + ca(c + a)$

$= ab(a + b + c) + bc(a + b + c) + ca(c + a)$

$= (a + b + c)(ab + bc) + ca(c + a)$

$= b(a + b + c)(a + c) + ca(c + a) = (a + c)(ab + b^2 + bc + a)$

$= (a + c)[b(a + b) + c(a + b) = (a + c)(a + b)(b + c)$

ĐỀ 18

Câu 1.

a) Giải phương trình: $x^2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{6} = 0$

b) Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}; \qquad B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(1 - \frac{x+4}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

Câu 2. *Vẽ đồ thị hàm số (P) :* $y = -\frac{x^2}{4}$ *và đường thẳng (D) :* $y = 2x + 3$ *trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (D) bằng phép tính*

Câu 3. *Hai ôtô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120km. Mỗi giờ ôtô thứ nhất chạy nhanh hơn ôtô thứ hai 10km nên đến B trước ôtô thứ hai là* $\frac{2}{5}$ *giờ. Tính vận tốc mỗi xe*

Câu 4. *Cho* ΔABC *có ba góc nhọn nội tiếp trong đường trònn (O; R), hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H (*$D \in BC; E \in AC; AB < AC$*)*

a) Chứng minh các tứ giác AEDB và CDHE nội tiếp

b) Chứng minh: CE.CA = CD.CB và DB.DC = DH.DA

c) Chứng minh OC vuông góc với DE

d) Đường phân giác trong AN của góc A của ΔABC *cắt BC tại N và cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN. Chứng minh KO và CI cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O)*

Câu 5. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ *với* $x > 0$

Giải

Câu 1.

a) $x^2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{6} = 0$

$\Delta = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - 4\sqrt{6} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\sqrt{3}$; $x = -\sqrt{2}$

b) $A = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = 2\sqrt{2}$

$B = \left(\dfrac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(1 - \dfrac{x+4}{x+\sqrt{x}+1}\right)$, điều kiện: $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 9$

$= \left(\dfrac{2x+1-x-\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}\right) : \left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1-x-4}{x+\sqrt{x}+1}\right)$

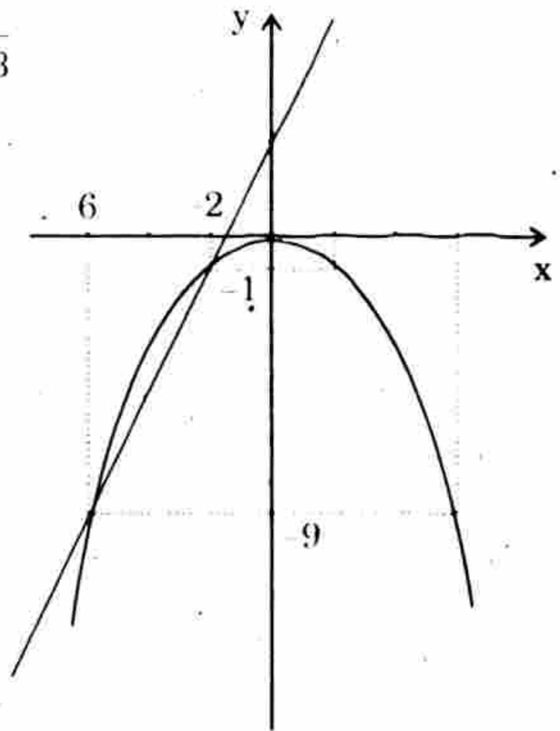
$= \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{x\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Câu 2.

Bảng giá trị:

x	-6	-2	0
y = 2x + 3	-9	-1	3

x	-6	-2	0	2
$y = \dfrac{-x^2}{4}$	9	-1	0	1



Tọa độ giao điểm của (P) và (D)

là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 12 = 0 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6; y_1 = -9 \\ x_1 = -2; y_1 = -1 \end{cases}$

Vậy (P) và (D) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A(-2; -1) và B(-6; -9)

Câu 3. Gọi x (km/h) là vận tốc ôtô thứ nhất (x > 10), thì x – 10 (km/h) là vận tốc ôtô thứ hai

- Thời gian ôtô thứ nhất đi đến B là: $\dfrac{120}{x}$ (giờ)

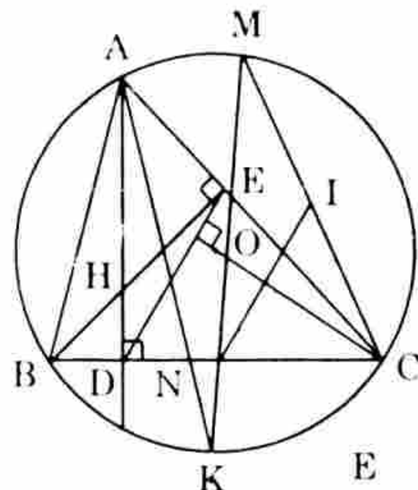
Thời gian ôtô thứ hai đi đến B là: $\frac{120}{x-10}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} = \frac{2}{5}$

Giải phương trình trên, ta được: $x_1 = 60$; $x_2 = -55$ (loại)

Vậy vận tốc ôtô thứ nhất là 60 (km/h), vận tốc của ôtô thứ hai là 50(km/h)

Câu 4.



a) Ta có: $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (giả thiết)

Do đó tứ giác AEDB là tứ giác nội tiếp

Tứ giác CDHE có:

$\widehat{CDH} + \widehat{CEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Do đó tứ giác CDHE nội tiếp

b) Xét hai tam giác vuông CEB và CDA

có: $\hat{C}$ chung $\Rightarrow \Delta CEB \sim \Delta CDA$

$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow CE.CA = CD.CB$

Xét hai tam giác vuông DBH và DAC có $\widehat{DBH} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DE) $\Rightarrow \Delta DBH \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow DB.DC = DH.DA$

c) Vẽ tiếp tuyến Cx của đường tròn (O) ta có:

$\widehat{ACx} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) (1)

$\widehat{DEC} = \widehat{BAC}$ (góc ngoài tứ giác nội tiếp ABDE) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ACx} = \widehat{DEC}$, do đó DE//Cx (vì có 2 góc ở vị trí so le trong bằng nhau)

Mà OC ⊥ Cx, suy ra OC ⊥ DE

d) Nối KC, ta có: $\widehat{NCK} = \widehat{BAK} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$)

$\widehat{NAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (vì AN là phân giác của góc BAK)

$\widehat{NAC} = \frac{\widehat{NIC}}{2}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{NCK} = \frac{\widehat{NIC}}{2}$.

Lại có: $\widehat{ICN} = \frac{180^\circ - \widehat{NIC}}{2}$ (do ΔNIC cân tại I)

Suy ra: $\widehat{ICN} + \widehat{NCK} = \dfrac{180^o}{2} - \dfrac{\widehat{NIC}}{2} + \dfrac{\widehat{NIC}}{2} \Rightarrow \widehat{ICK} = 90^o$

Do CI cắt (O) tại M nên ΔMCK vuông tại C và M, C, K $\in$ (I)

Suy ra MK đi qua O

Vậy KO và CI cắt nhau tại M $\in$ (O)

Câu 5. Ta có: $y = 2x + \dfrac{1}{x^2} = x + x + \dfrac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{x.x\dfrac{1}{x^2}} = 3$ (BĐT Côsi)

Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = 1$

ĐỀ 19

Câu 1. *Thu gọn các biểu thức sau:*

a) $A = \dfrac{8 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ b) $B = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)\left(6 - 2\sqrt{5}\right)\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

Câu 2. *Giải phương trình và hệ phương trình sau:*

a) $x^6 - 40x^3 + 351 = 0$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 10 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -25 \end{cases}$

Câu 3. *Cho hàm số $y = (m - 2)x + n$ (d). Tìm các giá trị của m và n để đồ thị của hàm số:*

a) *Đi qua hai điểm A(–1; 2) ; B(3; –4)*

b) *Song song với đường thẳng: $3x + 2y = 1$*

Câu 4. *Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một lúc, đi từ A đến B. Vận tốc của họ hơn kém nhau 3km/h nên đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng quãng đường AB dài 30km*

Câu 5. *Trên đường tròn (O; R) đường kính AB lấy hai điểm M, E theo thứ tự A, M, E, B (hai điểm M, E khác nhau hai điểm A, B). AM cắt BE tại C, AE cắt MB tại D*

a) *Chứng minh MCED là một tứ giác nội tiếp và CD $\perp$ AB*

b) *Gọi H là giao điểm của CD và AB. Chứng minh BE.BC = BH.BA*

c) *Chứng minh các tiếp tuyến tại M và E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng CD*

d) *Cho biết $\widehat{BAM} = 45^o$ và $\widehat{BAE} = 30^o$. Tính diện tích ΔABC theo R*

Giải

Câu 1.

a) $A = \dfrac{8+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \dfrac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{(8+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} - \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$= \dfrac{24+8\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4}{7} - \sqrt{2} - 3 - \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$= 4+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-3-2-\sqrt{2} = -1$

b) $B = (\sqrt{10}+\sqrt{2})(6-2\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$= \sqrt{2}(\sqrt{5}+1)(6-2\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}} = (\sqrt{5}+1)(6-2\sqrt{5})\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

$= (\sqrt{5}+1)(6-2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1) = (6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5}) = 36-20 = 16$

Câu 2.

a) Đặt $y = x^3$, phương trình đã cho trở thành: $y^2 - 40y + 351 = 0$

$\Delta' = 400 - 351 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 7 \Leftrightarrow y_1 = 27;\ y_2 = 13$

Với $y_1 = 27 \Rightarrow x_1 = 3$; Với $y_1 = 13 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{13}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 3;\ x = \sqrt[3]{13}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 10 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -25 \end{cases}$ (I)

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$. Đặt $X = \dfrac{1}{x};\ Y = \dfrac{1}{y}$, phương trình (I) có dạng:

$\begin{cases} X+Y=10 \\ 2X-3Y=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X+2Y=20 \\ 2X-3Y=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ Y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=1 \\ \dfrac{1}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{9} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $\left(1;\ \dfrac{1}{9}\right)$

Câu 3.

a) Vì (d) đi qua hai điểm A(–1; 2) và B(3; –4), nên ta có: $\begin{cases} -m+n=0 \\ 3m+n=2 \end{cases}$

Giải ra ta được: $m = n = \dfrac{1}{2}$

b) Phương trình 3x + 2y = 1 có thể viết lại: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (1)

Điều kiện để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (1) là:

$$\begin{cases} m - 2 = -\frac{3}{2} \\ n \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \vee n \neq \frac{1}{2}$$

Câu 4. Gọi vận tốc của người đi xe đạp với vận tốc chậm hơn là x (km/h) (x > 0)

Vận tốc của người đi nhanh hơn là: x + 3 (km/h)

Thời gian của người đi xe đạp chậm hơn là: $\frac{30}{x}$ (giờ)

Thời gian của người đi xe đạp nhanh hơn là: $\frac{30}{x+3}$ (giờ)

Do người đi xe đạp chậm hơn B sau 30 phút hay $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

Giải phương trình trên và kết hợp với điều kiện ta được: x = 12(km/h)

Câu 5.

a) $\widehat{AMB} = \widehat{AEB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra: $\widehat{CMD} = \widehat{CED} = 90^o$. Do đó MCDE nội tiếp đường tròn tâm I đường kính CD

Tam giác CAB có hai đường cao AE và BM cắt nhau tại trực tâm D. Do đó CD là đường cao thứ ba. Suy ra: $CD \perp AB$

b) Ta có: $\Delta BEA \sim \Delta BHC$ (g – g) $\Rightarrow BE.BC = BH.BA$

c) Ta có: IC = IM = ID = IE

$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{CMI}$; $\widehat{ACH} = \widehat{ABM}$; $\widehat{ABM} = \widehat{OMB}$

$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{OMB} \Rightarrow \widehat{CMI} + \widehat{IMD} = \widehat{OMB} + \widehat{IMD} = 90^o$

$\Rightarrow MI \perp OM \Rightarrow$ MI là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Vậy tiếp tuyến tại M và E của (O) cắt nhau tại trung điểm I của CD

d) Khi $\widehat{BAE} = 30^o \Rightarrow BE = R$ và $AE = R\sqrt{3}$

$\widehat{BAM} = 45^o \Rightarrow \widehat{BDH} = 45^o$ và $\widehat{BEH} = 45^o$

Do đó EH là tia phân giác $\widehat{BEA} \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{EB}{EA}$

$\Rightarrow \frac{EA}{HA} = \frac{EB}{HB} = \frac{EA+EB}{HA+HB} = \frac{R\sqrt{3}+R}{2R} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\Rightarrow HB = \frac{2EB}{\sqrt{3}+1} = \frac{2R}{\sqrt{3}+1} = R\left(\sqrt{3}-1\right)$

Từ câu b), ta suy ra: $BC = \frac{BH.BA}{BE}$

$= \frac{R\left(\sqrt{3}-1\right)2R}{R} = 2R\left(\sqrt{3}-1\right)$

Diện tích ΔABC là:

$S = \frac{1}{2}AE.BC = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2R\left(\sqrt{3}-1\right)$

$= R^2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$ (đvdt)

ĐỀ 20

Câu 1. *Cho biểu thức:* $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn P *b) Tính giá trị của x để $P = -1$*

Câu 2. *Giải các phương trình sau:*

a) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4} = 3$ *b)* $(2x-1)(x+4) = (x+1)(x-4)$

Câu 3. *Trong cùng một hệ trục tọa độ, cho (P) và (d) lần lượt là đồ thị của: $y = x^2$ và $y = -x + 2$*

a) Gọi (d') là đường thẳng song song với (d) và (d') đi qua điểm M(0, m) (m là tham số). Viết phương trình của (d')

b) Tìm m để (d') và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt?

Câu 4. *Một canô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24km, cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nứa trôi với vận tốc dòng nước là 4km/h. Khi đến B canô quay lại ngay và gặp bè nứa tại địa điểm C cách A là 8km. Tính vận tốc thực của canô*

Câu 5. *Cho đường tròn (O; R) với OA = 2R, từ A vẽ hai tiếp tuyến AE và AF đến đường tròn (O) (E, F là hai tiếp điểm)*

a) Chứng tỏ ΔAEF đều, tính cạnh của nó theo R

b) Đường thẳng OA cắt (O) tại B và C (A, B, C theo thứ tự ấy). Hỏi tứ giác AECF là hình gì ? Tính diện tích nó theo R

c) Từ O vẽ đường thẳng vuông góc với OE cắt AF tại M. Chứng minh tam giác MOA cân, suy ra BM là tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính AM theo R

d) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác OAM và OFM (không tính diện tích từng tam giác)

Giải

Câu 1.

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$, điều kiện: $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 1$

a) $$P = \left[\frac{4\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)+8x}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}\right] : \left[\frac{\sqrt{x}-1-2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$$

$$= \frac{8\sqrt{x}+4x}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)} : \frac{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{4\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)} : \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$= \frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} : \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{4x\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(3-\sqrt{x}\right)} = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$$

b) $P = \dfrac{4}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow 4x = 3-\sqrt{x} \Leftrightarrow 4x+\sqrt{x}-3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x+4\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)\left(4\sqrt{x}-3\right) = 0$ Vì $x > 0$ nên $x = \dfrac{9}{16}$

Câu 2.

a) $\dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{1}{3}$. Điều kiện: $x \neq \pm 4$

$\Leftrightarrow 3(x+4) + 3(x-4) = x^2 - 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8;\ x_2 = -2$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 8$; $x = -2$

b) $(2x-1)(x+4) = (x+1)(x-4) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - x - 4 = x^2 - 4x + x - 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(x+10) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = -10$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0$; $x = -10$

Câu 3.

a) (d') song song với (d) nên hệ số góc của (d') bằng -1; (d') đi qua $M(0,m)$ nên: $m = 0 + b \Rightarrow b = m$

Vậy phương trình đường thẳng (d') là: $y = -x + m$

b) Đường thẳng (d') cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi phương trình:

$x^2 = -x + m$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{4}$

Câu 4. Gọi x (km/h) (x > 4) là vận tốc thực của canô

Vận tốc xuôi dòng của canô là: x + 4 (km/h)

Vận tốc ngược dòng của canô là: x – 4 (km/h)

Thời gian canô đi đến lúc gặp bè nứa là: 8 : 4 = 2 (giờ)

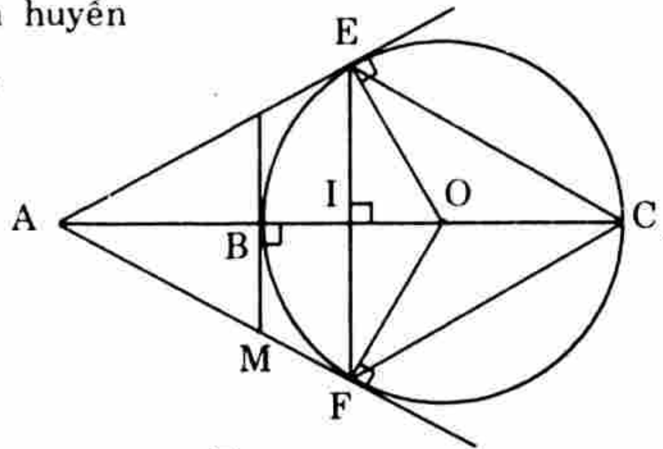
Thời gian ngược dòng đến chỗ gặp bè nứa của canô là: $\frac{16}{x-4}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{24}{x+24} + \frac{16}{x-4} = 2$

Giải phương trình trên ta được: $x_1 = 20$; $x_2 = 0$ (loại)

Vậy vận tốc thực của canô là 20 km/h

Câu 5.



a) ΔOAE vuông tại E có cạnh huyền OA = 2R, OE = R ⇒ AE = $R\sqrt{3}$, $\widehat{OAE} = 30^0$, $\widehat{AOE} = 60^0$

Ta có: AE = AF (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra ΔAEF cân tại A.

Mặt khác AO là phân giác $\widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 2\widehat{EAO} = 60^0$

Vậy ΔAEF là tam giác đều có cạnh AE = $R\sqrt{3}$

b) ΔCEF cân tại C (vì AC là đường trung trực của EF)

Ta có: $\widehat{OCE} = \frac{1}{2}\widehat{EOA}$ (góc ngoài tam giác)

Do đó: $\widehat{ECF} = 2\widehat{OCE} = \widehat{EOA} = 60^0$

Suy ra ΔCEF là tam giác đều CE = CF = EF = AE = AF

Vậy AECF là hình thoi với cạnh là $R\sqrt{3}$

Diện tích hình thoi AECF là:

$$Dt_{(\text{hình thoi AECF})} = Dt_{(\Delta AEF)} + Dt_{(\Delta CEF)} = 2Dt_{(\Delta AEF)}$$

$$= 2.\frac{1}{2}AI.EF \text{ (do AI là đường cao của } \Delta AEF)$$

$$= 2.\frac{1}{2}\frac{EF\sqrt{3}}{2}.EF = EF^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

c) Vì OM // AE (do cùng vuông góc với OE) nên có $\widehat{EAO} = \widehat{AOM}$, $\widehat{EAO} = \widehat{OAM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại A)

Do đó $\widehat{AOM} = \widehat{OAM}$, suy ra ΔMAO cân tại M

B là trung điểm của OA và OB = R

ΔMAO cân tại M có trung tuyến MB cũng là đường cao $BM \perp OB$

Vậy MB là tiếp tuyến của (O). Trong tam giác vuông ABM có góc $\widehat{MAB} = 30^o$, AB = R, suy ra: $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

d) Vì MF và MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) từ M, nên:

$\Delta OFM = \Delta OMB$ mà $\Delta OMB = \Delta ABM \Rightarrow \dfrac{Dt_{(\Delta OAM)}}{Dt_{(\Delta OFM)}} = \dfrac{2Dt_{(\Delta OMB)}}{Dt_{(\Delta OFM)}} = 2$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TPHCM (2006 – 2007)

Câu 1. *Thu gọn các biểu thức sau:*

$$A = \left(2 + \sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)\left(1 - \frac{2}{a + 1}\right)^2 \quad \text{với } a > 0, a \neq 1$$

Câu 2. *Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) : $y = \dfrac{3}{2}x + 2m$ cắt parabol (P) : $y = -\dfrac{3}{4}x^2$ tại hai điểm phân biệt ?*

Câu 3. *Giải các phương trình và hệ phương trình:*

a) $\sqrt{5 - x^2} = x - 1$

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} = 2 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = 3 \end{cases}$

c) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Câu 4.

a) *Cho hai số dương x, y thỏa: $x + y = 3\sqrt{xy}$. Tính $\dfrac{x}{y}$*

b) *Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$*

Câu 5. *Cho ΔABC có ba góc nhọn (AB < AC), có đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC*

a) *Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH*

b) Gọi F là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH và ECH. Chứng minh HF đi qua trung điểm của DE

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm F

Giải

Câu 1.

$$A = \left(2\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{16+4\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{16+4\left(\sqrt{5}-1\right)}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}.\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}.\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right) = 10-2 = 8$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(1-\frac{2}{a+1}\right)^2 = \left(\frac{a-2\sqrt{a}+1+a+2\sqrt{a}+1}{a-1}\right)\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$$

$$= \frac{2(a+1)}{a-1}.\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 = \frac{2(a-1)}{a+1}$$

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $\frac{3}{2}x + 2m = -\frac{3}{4}x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 8m = 0 \quad (*)$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{8}$

Vậy với $m < \frac{3}{8}$ thì (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Câu 3.

a) $\sqrt{5-x^2} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-2x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=-1; x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy x = 2 là nghiệm của phương trình đã cho

b) $\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 3 \end{cases} \quad (*)$

Điều kiện: $x \neq 0$; $y \neq 0$. Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$

(*) trở thành: $\begin{cases} 3u - 4v = 2 \\ 4u - 5v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Với $u = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

Với $v = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x; y) là $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

c) Khi các điều kiện đã thỏa ta có: $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = \sqrt{2 - (x-2)^2} \leq \sqrt{2}$

$$\sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = \sqrt{3 - 2(x-2)^2} \leq \sqrt{3}$$

Do đó: $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} + \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} \leq \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

Câu 4.

a) Ta có: $x + y = 3\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + 1 = 3\sqrt{\frac{x}{y}}$ (*)

Đặt $u = \sqrt{\frac{x}{y}}, u > 0$

(*) trở thành: $u^2 - 3u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{\left(3 \pm \sqrt{5}\right)^2}{4}$

b) Vì vai trò của x và y là như nhau nên ta giả sử rằng: $x \geq y$

Khi đó, ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$; $x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2$

$x \geq y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{2}{y} \Rightarrow y \leq 4$. Do đó: $2 < y \leq 4$

Mặt khác y là số nguyên dương (giả thiết) nên $y = 3$; $y = 4$

Với $y = 3 \Rightarrow x = 6$. Do tính đối xứng ta cũng có $x = 3$; $y = 4$

Với $y = 4 \Rightarrow x = 4$. Cách khác ta có:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x + y) = xy \Leftrightarrow 2x - xy + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x(2 - y) - 2(2 - y) = -4 \Leftrightarrow (2 - x)(2 - y) = 4$

Vì x, y > 0 nên 2 – x < 2, 2 – y < 2. Do đó ta có các trường hợp sau:

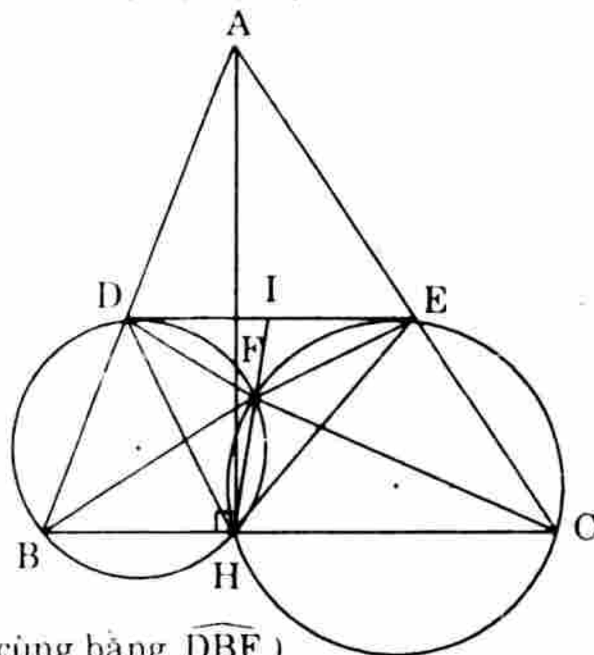
– $2 - x = -1$; $2 - y = -4$ $\Leftrightarrow$ $x = 3$; $y = 6$

– $2 - x = -4$, $2 - y = -1$ $\Leftrightarrow$ $x = 6$; $y = 3$

– $2 - x = -2$; $2 - y = -2$ $\Leftrightarrow$ $x = 4$; $y = 4$

– Vậy ta có các cặp số nguyên (x; y) là: (3; 6), (6; 3), (4; 4)

Câu 5.



a) Ta có: DE // BC $\Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{BHD}$

Tam giác vuông ABH có HD là trung tuyến nên DH = DB, suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{DBH}$.

Do đó $\widehat{HDE} = \widehat{DBH}$ suy ra DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác DBH tại D

Tương tự, ta có DE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp ΔDBH và ΔECH

b) Ta có: $\widehat{IDF} = \widehat{IHD}$; $\widehat{IFD} = \widehat{IDH}$ (vì cùng bằng $\widehat{DBF}$)

Do đó hai tam giác IDF và IHD đồng dạng

Suy ra: $\dfrac{ID}{IH} = \dfrac{IF}{ID} \Rightarrow ID^2 = IF.IH$ (1)

Tương tự ta có: $IE^2 = IF.IH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ID = IE hay HF qua trung điểm I của DE

c) Do các tứ giác BDEF và CEFH nội tiếp nên ta có:

$\widehat{DFH} + \widehat{DBH} = 180^\circ$; $\widehat{EFH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$

ΔAIC có: $\widehat{BAC} + \widehat{DBH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$

Mặt khác: $\widehat{DFH} + \widehat{EFH} + \widehat{DFE} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{DFE} = 180^\circ$

Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔADE qua F

Câu 1. *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ (x+y)(1+xy) = 4 \end{cases}$

Câu 2. *Với những giá trị của x thỏa mãn điều kiện* $x \geq -\frac{1}{2}$, *hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + 2\sqrt{x+3} - 2x$

Câu 3. *Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số thỏa mãn đồng thời hai tính chất*

1) *Khi chia số đó cho 100 ta được số dư là 6*
2) *Khi chia số đó cho 51 ta được số dư là 17*

Câu 4. *Cho hình vuông ABCD có cạnh AB = a. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho MN // AC, PQ // AC và* $\widehat{AMQ} = 30^o$

1) *Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng MQ, C' là điểm đối xứng với C qua đường thẳng NP. Giả sử đường thẳng QA' cắt đoạn thẳng NP tại E, đường thẳng PC' cắt đoạn thẳng MQ tại F. Chứng minh rằng năm điểm E, F, Q, D, P nằm trên cùng một đường tròn*
2) *Biết AC = 3MN, tính diện tích hình thang MNPQ theo a*

Câu 5. *Chứng minh rằng với mỗi số dương a cho trước, đa thức:* $f(x) = x^4 + ax^2 + 2$ *luôn là tổng bình phương của hai đa thức bậc hai*

Giải

Câu 1.

$$\begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ (x+1)(1+xy) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+y) = 4 \\ (x+1)(1+xy) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+y) = 4 \\ 1 + xy = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+y) = 4 & (1) \\ (x-1)(y-1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Với x = 1, thay vào (1) ta được: x = 1, y = 1

Với y = 1, thay vào (1) ta được: x = 1, y = 1 hoặc x = –3, y = 1

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x; y) là: (1; 1); (–3; 1)

Câu 2.

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + 2\sqrt{x+3} - 2x = \sqrt{(2x+1)(x+2)} + \sqrt{4(x+3)} - 2x$$

Do $x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 \geq 0, x + 2 > 0, x + 3 > 0$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ $(a, b \geq 0)$, ta có:

$$\sqrt{(2x+1)(x+2)} \leq \frac{2x+1+x+2}{2} = \frac{3x+3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow x = 1$

$$\sqrt{4(x+3)} \leq \frac{4+x+3}{2} = \frac{7+x}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $4 = x + 3 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó: $f(x) \leq \frac{3x+3}{2} + \frac{7+x}{2} - 2x = 5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

Vậy f(x) đạt giá trị lớn nhất bằng 5, đạt được khi $x = 1$

Câu 3. Gọi số tự nhiên gồm 4 chữ số phải tìm là a, theo đề bài ta có:

$a = 100n + 6 = 51k + 17$, trong đó n và k là các nguyên dương

Do đó $100n - 50k = k + 11 \Rightarrow k + 11$ chia hết cho 50. Mặt khác, vì a có bốn chữ số nên $a = 51k + 17 \leq 9999 \Rightarrow k \leq \frac{9982}{51} < 196 \Rightarrow k + 11 < 217$

Do $k + 11 \vdots 5$ nên $k + 11$ chỉ có thể là 50, 100, 150 hoặc 200. Suy ra k chỉ có thể là 39, 89, 139 hoặc 189

Với k = 39, ta có: a = 51.39 + 17 = 2006 (chia 100 dư 6)

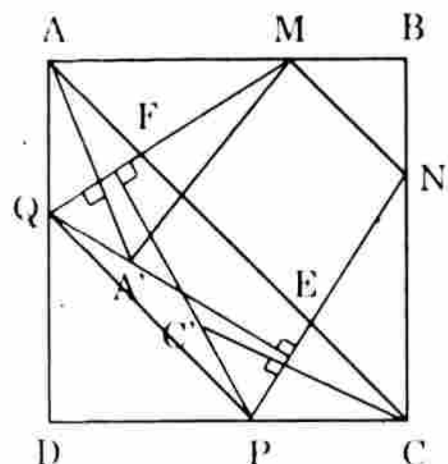
Với k = 89, ta có: a = 51.89 + 17 = 4556 (chia 100 dư 56)

Với k = 139, ta có: a = 51.139 + 17 = 7106 (chia 100 dư 6)

Với k = 189, ta có: a = 51.189 + 17 = 9656 (chia 100 dư 56)

Vậy có hai giá trị của a là: a = 2006 và a = 7106 thỏa yêu cầu bài toán

Câu 4.



1) Vì ΔBMN và ΔDPQ vuông cân nên AM = CN, AQ = CP

$\Rightarrow \Delta AMQ = \Delta CNP$

$\Rightarrow \widehat{CPN} = \widehat{AQM} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DPN} = 120^\circ$ hay $\widehat{DPE} = 120^\circ$

Do A' đối xứng với A qua QM

nên $\widehat{A'QM} = \widehat{AQM} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DQE} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{PEQ} = 360^0 - 90^0 - 60^0 - 120^0 = 90^0$

Tương tự ta có $\widehat{PFQ} = 90^0$

Suy ra năm điểm E, F, Q, P cùng nằm trên một đường tròn đường kính PQ

2) Do $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ nên $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow MB = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3} \Rightarrow AM = \frac{2a}{3}$

Vì $AM = AQ\sqrt{3} \Rightarrow AQ = \frac{2a}{3\sqrt{3}} \Rightarrow QD = a - \frac{2a}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}.a$

Từ đó suy ra: $S_{MBN} = \frac{a^2}{18}$; $S_{AMQ} = S_{CNP} = \frac{2a^2}{9\sqrt{3}}$ và $S_{PDQ} = \frac{31-12\sqrt{3}}{54}.a^2$

Do đó: $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - S_{MBN} - S_{AMQ} - S_{CNP} - S_{PDQ} = \frac{10+2\sqrt{3}}{27}a^2$

Câu 5. Xét 2 trường hợp:

a) $\Delta = a^2 - 8 \le 0$. Khi đó, ta có: $f(x) = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + 2 - \frac{a^2}{4} = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8-a^2}}{2}\right)^2$

Áp dụng hằng đẳng thức: $A^2 + B^2 = \frac{(A+B)^2}{2} + \frac{(A-B)^2}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\left(x^2 + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{8-a^2}}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(x^2 + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{8-a^2}}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{a+\sqrt{8-a^2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{a-\sqrt{8-a^2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{(đpcm)}$$

b) $\Delta = a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a > 2\sqrt{2}$. Khi đó, ta có:

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{a-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}x + 1\right)^2 + \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{a-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}x + 1\right)^2 \text{(đpcm)}$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TPHCM (2006 – 2007)

Câu 1. *Giải các phương trình và hệ phương trình sau:*

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases}$ b) $2x^2 + 2\sqrt{3} - 3 = 0$ c) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

Câu 2. *Thu gọn các biểu thức sau:*

$$A = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}};$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right) \quad (\text{với } a > 0 \text{ và } a \neq 4)$$

Câu 3. *Cho mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $360m^2$. Nếu tăng chiều rộng 2m và giảm chiều dài 6m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính chu vi mảnh đất lúc đầu*

Câu 4.

a) *Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y= 3x+1$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4*

b) *Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 4$ và $y = -\frac{x^2}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị ấy bằng phép tính*

Câu 5. *Cho ΔABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và D*

a) *Chứng minh: AD.AC = AE.AB*

b) *Gọi H là giao điểm của BD và CE. Gọi K là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AH vuông góc với BC*

c) *Từ A vẽ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$*

d) *Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng*

Giải

Câu 1.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = -3 \\ 10x + 6y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 17 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm (x; y) là: (−11; 17)

b) $2x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$ có $\Delta' = 3 + 6 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$; $x = \frac{-\sqrt{3}-3}{2}$.

c) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$. Đặt $y = x^2$ $(y \geq 0)$

$\Leftrightarrow 9y^2 + 8y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1;\ y_2 = \frac{1}{9}$ (vì $a - b + c = 1$)

So với điều kiện nhận nghiệm $y_2 = \frac{1}{9}$ với $y = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$

Câu 2.

$$A = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2} - \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-2\right)}{\sqrt{5}-2} - \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{3}-2-\sqrt{3} = -2$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2}\right)\left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right) = \frac{\left(\sqrt{a}-2\right)^2 - \left(\sqrt{a}+2\right)^2}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)} \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{-8\sqrt{a}}{a-4} \cdot \frac{a-4}{\sqrt{a}} = -8$$

Câu 3. Gọi chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật lúc đầu là: x (m), $(x > 0)$

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là: $\frac{360}{x}$ (m)

Chiều rộng mảnh đất sau khi tăng 2m là: $x + 2$ (m)

Chiều dài mảnh đất sau khi giảm 6m là: $\frac{360}{x} - 6$ (m)

Theo đề bài, ta có phương trình: $(x+2)\left(\frac{360}{x} - 6\right) = 360$

Giải ra ta được: $x = 10$; $x = -12$ (loại)

Vậy: Chiều rộng mảnh đất lúc đầu là: 10 (m)

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là: $\frac{360}{10} = 36$m

Chu vi mảnh đất lúc đầu là: $(36 + 10) \cdot 2 = 92$ (m)

Câu 4.

a) Phương trình (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên (d) có dạng $y = 3x + b$. (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4: $4 = b$ hay $b = 4$. Vậy (d) : $y = 3x + 4$

b) Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{2}$	-8	-2	0	-2	8

x	0	2
y = 3x + 4	4	2

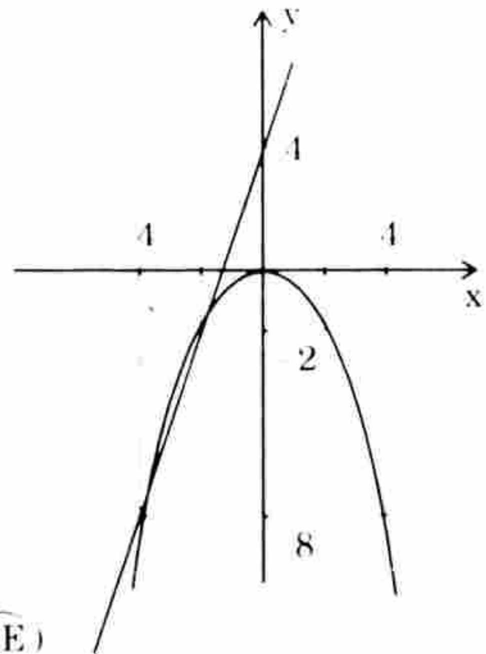
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$\frac{x^2}{2} = 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 4$

$\Rightarrow y_1 = 2;\ y_2 = 8$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là: (2; 2) và (4; 5)



Câu 5.

a) Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (cùng chắn cung $\widehat{DE}$)

Suy ra: $\Delta ABD \sim \Delta ACE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AD.AC = AE.AB$

b) Ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó: $BD \perp AC$ và $CE \perp AB$

Hay BD và CE là hai đường cao của ΔABC

Mặt khác H là giao điểm của BD và CE nên H là trực tâm của tam giác ABC. Suy ra $AH \perp BC$ (đpcm)

c) Ta có: $\widehat{ANM} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây với góc ở tâm cùng chắn $\widehat{MN}$)

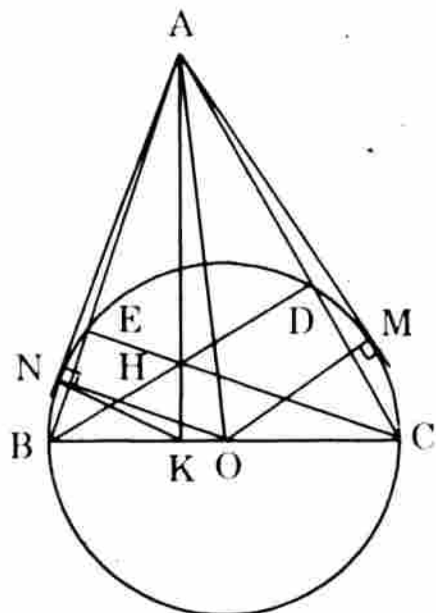
Mà OA là tia phân giác của góc MON

nên $\widehat{AON} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$, suy ra:

$\widehat{AMN} = \widehat{AON}$ (1)

Ngoài ra: $\widehat{ANO} = \widehat{AMO} = 90^\circ$, nên tứ giác ANKO nội tiếp, suy ra:

$\widehat{AKN} = \widehat{AON}$ (2)



Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$

d) Ta có: $\widehat{ANE} = \widehat{ABN}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây nối với góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{NE}$); $\widehat{NAB}$ là góc chung của hai tam giác ANB và ANE

$\Rightarrow \Delta ANE \sim \Delta ANB$ (g – g). Do đó: $\frac{AN}{AB} = \frac{AE}{AN} \Rightarrow AN^2 = AE.AB$ (1)

Mặt khác: $\widehat{AEH} = \widehat{AKB} = 90^0 \Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta AKB$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AK} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AE.AB = AH.AK$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AN^2 = AH.AK$

Xét hai tam giác ANH và ANK: $\widehat{NAK}$ chung; $\dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AH}{AN}$

$\Rightarrow \Delta ANH \sim \Delta AKN$ (c – g – c). Do đó $\widehat{ANH} = \widehat{AKN}$

Suy ra hai tia NH và NM trùng nhau

Vậy 3 điểm M, H, N thẳng hàng

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 NGUYỄN TRÃI, HẢI PHÒNG (2005 – 2006)

Câu 1. *Cho biểu thức:* $P = \left(\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$; $x > 0$ *và* $x \neq 1$

1) *Rút gọn biểu thức P* 2) *Tìm giá trị của x để P = 3*

Câu 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x(y-2) = (x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7) = (2x-7)(y+3) \end{cases}$$

Câu 3. *Cho hai hàm số* $y = mx + m^2 + \dfrac{9}{4}$ *và* $y = (4x^2 + 1)x^2$

Tìm giá trị của m để đồ thị hai hàm số trên cùng đi qua điểm (–1; 2). Với hai giá trị m tìm được,xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị đó

Câu 4. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, hai đường phân giác BE và CF cắt nhau tại I (E trên AC, F trên AB) sao cho tứ giác AEIF nội tiếp một đường tròn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, đường thẳng OH cắt cạnh AB tại M và cắt cạnh AC tại N*

1) *Tính* $\widehat{BAC}$

2) *Chứng minh năm điểm B, H, I, O, C cùng nằm trên một đường tròn*

3) *Chứng minh BM + CN = MN*

Câu 5. *Cho phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *có hai nghiệm là* x_1, x_2 *thỏa mãn* $ax_1 + bx_2 + c = 0$. *Tính giá trị biểu thức:*

$M = a^2c + ac^2 + b^3 - 3abc$

Giải

Câu 1.

1) Ta có: $A = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$B = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$

$\Rightarrow P = A : B = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{2-\sqrt{x}}{x}$

2) $P = 3 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{x} = 3 \Leftrightarrow 3x + \sqrt{x} - 2 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$ (thoả điều kiện bài toán)

Câu 2.

$$\begin{cases} x(y-2) = (x+2)(y-4) \\ (x-3)(2y+7) = (2x-7)(y+3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x = xy + 2y - 4x - 8 \\ 2xy - 6y + 7x - 21 = 2xy - 7y + 6x - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm (x; y) là (-2; 2)

Câu 3.

- Đồ thị hàm số $y = mx + m^2 + \frac{9}{4}$ đi qua điểm (-1; 2), nên ta có:

$$2 = -m + m^2 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

- Đồ thị hàm số $y = (4m^2 + 1)x^2$ đi qua điểm (-1; 2), nên ta có:

$$2 = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$$

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì đồ thị hai hàm số trên đi qua điểm (-1; 2)

Với $m = \frac{1}{2}$ thì hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \left(4.\frac{1}{4} + 1\right)x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = \frac{5}{4}$

Từ đó ta tìm được giao điểm thứ hai của đồ thị hai hàm số trên là: $\left(\frac{5}{4}; \frac{25}{8}\right)$

Câu 4.

1) Tứ giác AEIF nội tiếp, suy ra

$\widehat{BAC} + \widehat{EIF} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BIC} = 180^0$ ($\widehat{BIC} = \widehat{EIF}$ đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$

2) Dễ thấy $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^0$;

$\widehat{BIC} = \widehat{BHC} = 180^0 - \widehat{BAC} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{BIC} = \widehat{BHC} = 120^0$

Suy ra 5 điểm B, H, I, O, C cùng thuộc một đường tròn

3) Ta có: ΔBOC cân tại O, $\widehat{BOC} = 120^0$ nên $\widehat{BCO} = \widehat{CBO} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BCO} = 30^0$; $\widehat{CHO} = \widehat{CBO} = 30^0$ (vì tứ giác BHOC nội tiếp)

Mặt khác: $\widehat{ABH} = \widehat{ACH} = 90^0 - \widehat{BAC} = 30^0$

Suy ra ΔMBH cân tại M, ΔNCH cân tại N

$\Rightarrow MB = MH,\ NC = NH \Rightarrow MB + NC = MN$

Câu 5. Áp dụng định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a};\quad x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{b}{a}x_2 + \frac{c}{a} = x_1 - x_2\left(x_1 + x_2\right) + x_1x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2^2 \Rightarrow x_2 + x_2^2 = -\frac{b}{a};\ x_2^3 = \frac{c}{a}$$

Do đó: $\dfrac{M}{a^3} = \dfrac{c}{a} + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^3 - 3.\dfrac{b}{a}.\dfrac{c}{a}$

$$= x_2^3 + x_2^6 - \left(x_2 + x_2^2\right)^3 + 3\left(x_2 + x_2^2\right)x_2^3 = 0$$

Vậy M = 0

Câu 1. *Tính giá trị của biểu thức* $A = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 16}.\left(x^2 - 8x + 16\right)$ *với* $x = 8$

Câu 2. *Cho phương trình bậc hai đối với x:* $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ *(1)*

a) Giải phương trình (1) với $m = 0$

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 *∀m*

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 *không phụ thuộc m*

d) Xác định giá trị của m sao cho phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

Câu 3. *Một canô xuôi dòng 48km rồi ngược dòng 22km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lớn hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc xuôi dòng lớn hơn vận tốc ngược dòng là 5km/h. Tính vận tốc canô lúc ngược dòng*

Câu 4. *Chứng minh rằng nếu* $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = 1$ *thì*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

Câu 5. *Cho đường tròn tâm O đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn O' đường kính BC. Gọi M là trung điểm của AB, từ M kẻ dây cung DE vuông góc với AB; DC cắt đường tròn tâm O' ở I*

a) Chứng minh tứ giác DMBI nội tiếp được trong một đường tròn

b) Chứng minh BI // AD

c) Chứng minh ba điểm I, B, E thẳng hàng

Câu 6. *Cho hình thoi ABCD có góc A bằng* 120°. *Gọi M là một điểm trên cạnh AB. Các đường thẳng DM và BC cắt nhau ở N*

a) Chứng minh hai tam giác AMD và CDN đồng dạng, từ đó suy ra hệ thức: $AC^2 = AM.CN$

b) Hai đường thẳng CN và AN cắt nhau ở E. Chứng minh tứ giác AEBC nội tiếp được trong một đường tròn

c) Khi hình thoi ABCD cố định, M chuyển động trên cạnh AB. Chứng minh rằng điểm E chuyển động trên một cung tròn cố định

Giải

Câu 1.

$$A = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2-16}\left(x^2-8x+16\right) = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{(x-4)(x+4)}(x-4)^2 = \frac{|x+2|(x-4)}{x+4}$$

Với $x = 8 \Rightarrow A = \frac{10}{3}$

Câu 2.

$x^2 - 2(m-1)x + m - 3$ (1)

a) Với m = 0, (1) trở thành: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$

b) (1) có $\Delta' = (m-1)^2 - (m-3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi m nên (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt

c) Áp dụng định lí Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m-3 \end{cases} \Rightarrow m = x_1x_2 + 3$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2(x_1.x_2 + 3 - 1) \Rightarrow x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 4$ (*)

(*) chính là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

d) $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 3.

Gọi x (km/h) là vận tốc của canô khi đi ngược dòng, thì x + 5 (km/h) là vận tốc của canô khi xuôi dòng

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{48}{x+5} - \frac{22}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 110 = 0$

Giải phương trình trên ta được: x = 10; x = 11

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy vận tốc của canô khi ngược dòng là 10km/h hoặc 11 km/h

Câu 4.

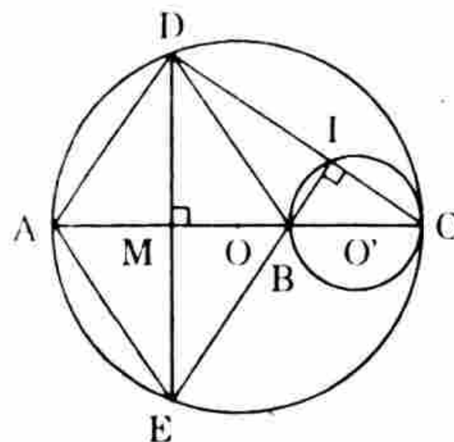
Ta có: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$

$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) = a+b+c$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 5



a) Dễ thấy $\widehat{DMB} = \widehat{DIB} = 90^0$,

do đó DMBI là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BD

b) Mặt khác $\widehat{ADC} = \widehat{BIC} = 90^0$,

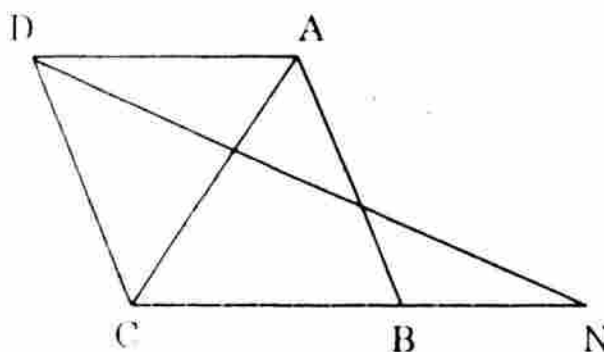
Suy ra BI // AD (cùng vuông góc với CD)

c) Từ giả thiết ta có M là trung điểm của AB và DE, suy ra:

ABDE là hình bình hành

$\Rightarrow$ AD // BE $\Rightarrow$ I, B, E thẳng hàng (vì theo câu b) thì AD // BI)

Câu 6



a) Xét ΔAMD và ΔCDN có:

$\widehat{ADM} = \widehat{MNC}$ (so le trong);

$\widehat{ADM} = \widehat{MNC} = 120^0$ suy ra:

$\Delta AMD \sim \Delta CDN$ (g – g)

Do đó: CD.AD = AM.CN

Mặt khác, dễ thấy ΔADC là tam giác đều nên: AC = AD = CD $\Rightarrow AC^2 = AM.CN$

b) Ta cũng có ΔABC là tam giác đều nên $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60^0$

Mặt khác $AC^2 = AM.CN$ nên hai tam giác MAC và ACN đồng dạng theo trường hợp một cặp góc bằng nhau có hai cạnh bên tương ứng tỉ lệ, suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{ANC}$

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ANC} + \widehat{ECN} = \widehat{ACM} + \widehat{ECN}$

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ $\Rightarrow$ tứ giác AEBC nội tiếp

c) Từ câu b) suy ra E thuộc cung nhỏ AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

ĐỀ 26

Câu 1. *Cho phương trình có ẩn số x :* $x^2 - 3x - m^2 + m + 2 = 0$

1) *Chứng minh rằng phương trình có nghiệm số với mọi giá trị của m*

2) *Tìm các giá trị của m sao cho nghiệm* x_1, x_2 *của phương trình thỏa mãn điều kiện* $x_1^3 + x_2^3 = 9$

Câu 2. *Cho biểu thức:* $P = \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}}$

a) *Rút gọn biểu thức P*

b) *Chứng minh rằng P có giá trị không đổi nếu* $\frac{x}{y} = \frac{x+1}{y+5}$

Câu 3. *Một ôtô đi quãng đường AB dài 60km trong một thời gian đã dự định ôtô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc lớn hơn dự định là 10km/h và đi nửa quãng đường sau với vận tốc kém hơn dự định là 6km/h. Biết ôtô đến B đúng dự định. Tính thời gian ôtô dự định đi quãng đường AB*

Câu 4. *Cho đường tròn (O) và dây cung BC với góc BOC = 120°. Các tiếp tuyến vẽ tại B và C với đường tròn cắt nhau tại A. Gọi M là điểm tuỳ ý trên cung nhỏ BC (trừ B, C). Tiếp tuyến tại M với đường tròn (O) cắt AB tại E, cắt AC tại F*

a) *Tính số đo góc EOF*

b) *Chứng minh tam giác ABC đều. Tính chu vi tam giác AEF, biết bán kính đường tròn (O) là R*

c) *Gọi I và K tương ứng là giao điểm của BC với OE và OF. Chứng minh tứ giác OIFC nội tiếp và các đường thẳng OM, EK, FI cùng đi qua một điểm*

d) *Chứng minh ΔOIK đồng dạng với ΔOFE và EF = 2KI*

Câu 5. *Cho x, y, z > 0, x + y + z = 1*

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$

Giải

Câu 1.

$x^2 - 3x - m^2 + m + 2 = 0$

1) $\Delta = 9 - 4(-m^2 + m + 2) = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2 \geq 0 \; \forall m$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m

2) Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = -m^2 + m + 2 \end{cases}$

$x_1^3 + x_2^3 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9$

$\Leftrightarrow 27 - 9(-m^2 + m + 2) = 9$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 9m = 0 \Leftrightarrow m = 0;\ m = 1$

Vậy với m = 0; m = 1 thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 2:

a) $P = \dfrac{x}{\sqrt{xy} + y} + \dfrac{y}{\sqrt{xy} - x} - \dfrac{x + y}{\sqrt{xy}}$. Điều kiện: $x, y > 0$ và $x \neq y$

Khi đó $P = \dfrac{x}{\sqrt{xy} + y} + \dfrac{y}{\sqrt{xy} - x} - \dfrac{x + y}{\sqrt{xy}}$

$$= \frac{(x + y)\left(\sqrt{xy} - x + y\right)}{(y - x)\sqrt{xy}} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}} = \frac{x + y}{y - x}$$

b) Vì $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x + 1}{y + 5}$ nên $y = 5x$. Do đó $P = \dfrac{x + y}{y - x} = \dfrac{6x}{4x} = \dfrac{3}{2}$

Vậy P luôn có giá trị không đổi

Câu 3: Gọi vận tốc ôtô dự định đi quãng đường AB là: x (km/h) (x > 0)

Thời gian ôtô dự định đi quãng đường AB là: $\dfrac{60}{x}$ (h)

Vận tốc ôtô đi $\dfrac{1}{2}$ quãng đường đầu trong thực tế là: x + 10 (km/h)

Thời gian ôtô đi $\dfrac{1}{2}$ quãng đường đầu là: $\dfrac{60}{2} : (x + 10) = \dfrac{30}{x + 10}$ (h)

Vận tốc ôtô đi $\dfrac{1}{2}$ quãng đường còn lại trong thực tế là: x − 6 (km/h)

Thời gian ôtô đi $\dfrac{1}{2}$ quãng đường còn lại là: $\dfrac{60}{2} : (x - 6) = \dfrac{30}{x - 6}$ (h)

Theo đề bài ta có phương trình: $30.\left(\dfrac{1}{x + 10} + \dfrac{1}{x - 6}\right) = \dfrac{60}{x - 6}$

Giải phương trình trên và kết hợp điều kiện của ẩn ta được x = 30

Vậy thời gian ôtô dự định đi quãng đường AB là: $\dfrac{60}{30} = 2$ (h)

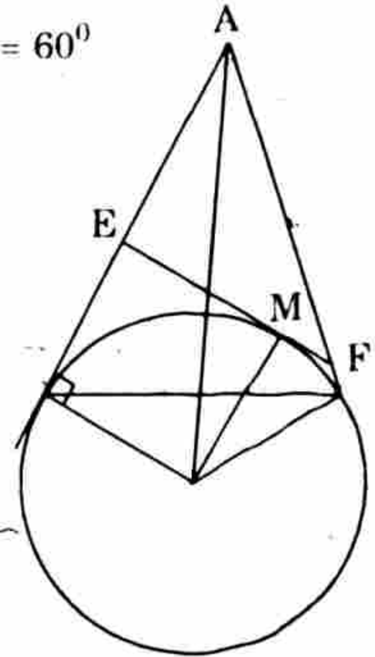
Câu 4:

a) Ta có OE, OF lần lượt là phân giác của $\widehat{BOM}$ và $\widehat{MOC}$, do đó:

$\widehat{EOF} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BOM} + \widehat{MOC}\right) = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^0$

b) Ta có AB = AC ⇒ ΔABC cân tại A

Mặt khác $\widehat{BAC} = 360^0 - \left(90^0 + 90^0 + 120^0\right) = 60^0$



Vậy ΔABC là tam giác đều.

Chu vi ΔAEF = AE + EF + FA

= (AE + EB) + (AF + FC)

= AB + AC = 2AB

Mà AB = OB.cotg $\widehat{AOB}$

= R.cotg30^0 = $R\sqrt{3}$

Vậy chu vi ΔAEF = $2R\sqrt{3}$

c) ΔABC đều nên $\widehat{ACB} = 60^0$

⇒ $\widehat{ICF} = \widehat{IOF}$ (cùng bằng 60^0)

Vậy tứ giác OIFC nội tiếp đường tròn

Do đó $\widehat{OIF} + \widehat{OCF} = 180^0$

Mà $\widehat{OCF} = 90^0$ nên $\widehat{OIF} = 90^0$ hay FI ⊥ OI, FI ⊥ OE

Tương tự ta chứng minh được EK ⊥ OF

Trong tam giác OEF có OM, EK và FI là ba đường cao nên chúng đồng quy

d) Tứ giác EIKF nội tiếp, suy ra $\widehat{OEF} = \widehat{OKI}$ (cùng bù với góc IKF)

ΔOIK ~ ΔOFE (g-g-g), ta có: $\dfrac{IK}{EF} = \dfrac{OK}{OE}$ (1)

Tam giác BOC cân tại O có $\widehat{BOC} = 120^0$ nên $\widehat{OBC} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OBK} = 30^0 \Rightarrow \dfrac{OK}{OE} = \sin\widehat{OEK} = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$

Thay vào (1) ta được: $\dfrac{IK}{EF} = \dfrac{1}{2}$ hay EF = 2IK

<u>Câu 5</u>: Ta có: $S = (x + y + z).S = (x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{9}{z}\right)$

$$= 1 + 4 + 9 + \left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z}\right) + \left(\frac{9y}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

(do x + y + z = 1)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 4;\quad \frac{4z}{y} + \frac{9y}{z} \geq 12;\quad \frac{9x}{z} + \frac{z}{x} \geq 6$$

$\Rightarrow S \geq 1 + 4 + 9 + 4 + 12 + 6 = 36$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ 4z^2 = 9y^2 \\ 9x^2 = z^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 36 đạt được khi và chỉ khi: $x = \frac{1}{6}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \frac{1}{2}$

ĐỀ 27

Câu 1: *Rút gọn các biểu thức sau:*

a) $A = \sqrt{13 + 6\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}} - 3\sqrt{2}$

b) $B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} - \frac{x + y}{y - x}$

Câu 2: *Cho Parabol (P) có phương trình:* $y = x^2$ *và A(0; 1)*

a) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A(0; 1) có hệ số góc k

b) Tìm k để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại 2 điểm phân biệt. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn MN

Câu 3: *Cho phương trình:* $mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$

Tìm m để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 *thỏa mãn:*

$$x_1^2 + x_2^2 = 2003$$

Câu 4: *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, C là trung điểm của AO, đường thẳng Cx vuông góc với đường thẳng AB, Cx cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C, K khác I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến với nửa đường tròn tâm O tại điểm M cắt Cx tại N, tia BM cắt Cx tại D*

a) Chứng minh bốn điểm A, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh ΔMNK cân

c) Tính diện tích ΔABD khi K là trung điểm của đoạn CI

d) Chứng minh rằng: khi K di động trên đoạn thẳng CI thì tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔAKD nằm trên một đường thẳng cố định

Câu 5: *Cho hai số dương a, b và a + b = 5*

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Giải

Câu 1:

a) Ta có: $\sqrt{9-4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2} = 2\sqrt{2}-1$

Nên $\sqrt{13+6\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}} - 3\sqrt{2} = \sqrt{13+6\sqrt{4+2\sqrt{2}-1}} - 3\sqrt{2}$

$$= \sqrt{13+6\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} - 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{13+6\left(\sqrt{2}+1\right)} - 3\sqrt{2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}+1\right)^2} - 3\sqrt{2} = 1$$

b) $$B = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} + \frac{x+y}{x-y}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} + \frac{x+y}{x-y}$$

$$= \frac{x+y+2\sqrt{xy}-x-y+2\sqrt{xy}}{2(x-y)} + \frac{x+y}{x-y}$$

$$= \frac{2\sqrt{xy}}{x-y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x-y} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

Câu 2:

a) Gọi phương trình của đường thẳng (d) là: $y = kx + b$

(d) đi qua A(0; 1) nên: $1 = k.0 + b \Rightarrow b = 1$

Vậy (d) có phương trình: $y = kx + 1$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \qquad (*)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có 2 nghệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = k^2 + 4 > 0\ \forall k$

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\forall k$

Gọi x_M, x_N là hai nghiệm phân biệt của (*) khi đó ta có $M(x_M; y_M)$ $N(x_N; y_N)$. Vì I là trung điểm của MN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{(kx_M + 1) + (kx_N + 1)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{k}{2} \\ y_I = k.\dfrac{x_M + x_N}{2} + 1 = \dfrac{k^2}{2} + 1 \end{cases}$$

Vậy $I\left(\dfrac{k}{2}; \dfrac{k^2}{2} + 1\right)$

Câu 3:

$mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ (*)

(*) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (2m-1)^2 - 4m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

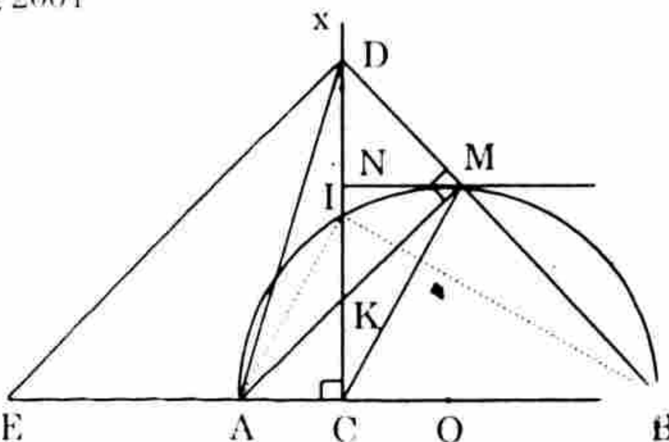
Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{1-2m}{m} \\ x_1 x_2 = \dfrac{m-2}{m} \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = 2003 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2003$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1-2m}{m}\right)^2 - 2\dfrac{m-2}{m} = 2003 \Leftrightarrow 2001m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2001}}$

Vì $m > -\dfrac{1}{4}$ nên chọn $m = \dfrac{1}{\sqrt{2001}}$

Câu 4:



a) Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^0$

Do đó tứ giác ACMD nội tiếp đường tròn đường kính AD, hay bốn điểm A, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn

b) Ta có: $\widehat{BMK} + \widehat{BCK} = 180^0$

Do đó tứ giác BMKC nội tiếp. Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{MKN}$ (do cùng bù với $\widehat{MKC}$)

Mặt khác ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{NMA}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AM}$)

Suy ra $\widehat{MKN} = \widehat{NMK}$. Do đó ΔMKN cân tại N

c) Ta có: $\widehat{NMD} = \widehat{MDN}$ (vì cùng phụ với hai góc $\widehat{NMK} = \widehat{NKM}$)

Do đó tam giác MND cân tại N, suy ra NM = ND. Mà NM = NK, do đó ND = NK

Tam giác AIB cân tại I, có $IC \perp AB$ nên $IC^2 = AC.AB = \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$

Suy ra $IC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Khi K là trung điểm của IC, ta có $KC = \dfrac{1}{2}IC = \dfrac{R\sqrt{3}}{4}$

$\text{tg}\widehat{KAC} = \frac{KC}{AC} = \frac{R\sqrt{3}}{4} : \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Mà $\widehat{KAC} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABD}$), do đó $\text{tg}\widehat{CDB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $\frac{CB}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CD = \frac{2CB}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}$

$\text{Dt}(\Delta ABD) = \frac{1}{2}AB.CD = \frac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$

d) Gọi E là điểm đối xứng của B qua C, suy ra E cố định, $\widehat{DEB} = \widehat{MKD}$ (cùng bù với $\widehat{MKC}$), suy ra $\widehat{DEA} = \widehat{MKD}$

Do $\widehat{MKD} + \widehat{DKA} = 180^0$, nên $\widehat{DEA} + \widehat{AKD} = 180^0$

Vậy tứ giác AKDE là tứ giác nội tiếp

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAKD, suy ra J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AKDE nên JA = JE. Vậy J thuộc đường trung trực của đoạn AE cố định

Câu 5: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a + b \ge 2\sqrt{ab} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \quad (2)$$

Vì các vế của (1) và (2) đều dương nên ta có:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 4\sqrt{ab\frac{1}{ab}} = 4$$

$\Leftrightarrow 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 4$ (do a + b = 5) $\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a + b = 5 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{5}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{5}$ đạt được khi $a = b = \frac{5}{2}$

ĐỀ 28

Câu 1:

a) Rút gọn biểu thức: $P = \dfrac{5\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{4 - 2x}$

b) Chứng minh rằng: $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-3x} \le 3$ *nghiệm đúng với mọi giá trị của x thuộc tập xác định*

Câu 2: *Cho* x_1, x_2 *là hai nghiệm của phương trình* $x^2 - 7x + 3 = 0$

a) Hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm là $2x_1 - x_2$ *và* $2x_2 - x_1$

b) Hãy tính giá trị biểu thức $A = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|$

Câu 3: *Giải phương trình:*

a) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$ *b)* $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Câu 4: *Cho hàm số* $y = -x^2$ *(P) và* $y = 2x - m^2 + 2m$ *(D). Với những giá trị nào của m thì đường thẳng (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt ?*

Câu 5: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O), có các đường phân giác trong cắt nhau tại I. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn (O) tương ứng tại các điểm M, N, P*

a) Chứng minh tam giác NIC cân tại N

b) Chứng minh rằng điểm I là trực tâm của tam giác MNP

c) Gọi E là giao điểm của MN và AC, F là giao điểm của PM và AB. Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng

d) Gọi K là trung điểm của BC và giả sử rằng BI vuông góc với IK, BI = 2IK. Hãy tính góc A của tam giác ABC

Giải

Câu 1:

a) $P = \dfrac{5\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{4 - 2x} = \dfrac{5\sqrt{(x-2)^2}}{2(2-x)} = \dfrac{5|x-2|}{2(2-x)}$

Nếu $x \ge 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2 = -(2 - x)$

Do đó $P = \dfrac{-5(2-x)}{2(2-x)} = -\dfrac{5}{2}$

Nếu $x < 2$ thì $x - 2 < 0$ nên $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$

Do đó $P = \dfrac{5(2-x)}{2(2-x)} = \dfrac{5}{2}$

b) Ta chứng minh với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$

$$a + b + c \leq \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} \qquad (1)$$

Ta có: $a + b + c \leq \sqrt{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \qquad (2)$

(2) đúng, suy ra (1) đúng

Đặt $a = \sqrt{x + 1}$, $b = \sqrt{2x - 3}$ và $c = \sqrt{5 - 3x}$, áp dụng (1) ta có:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-3x} \leq \sqrt{3\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + \left(\sqrt{5-3x}\right)^2\right]}$$

$$\leq \sqrt{3\left(x + 1 + 2x - 3 + 5 - 3x\right)} = 3$$

Câu 2:

a) Áp dụng định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$

Xét: $(2x_1 - x_2) + (2x_2 - x_1) = x_1 + x_2 = 7$

$(2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1) = 4x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1x_2 \; -2x_1^2 = -2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 5x_1x_2$

$= -2(x_1 + x_2)^2 = 9x_1x_2 = -2.49 + 27 = -71$

Vậy phương trình bậc hai có 2 nghiệm $(2x_1 - x_2)$ và $(2x_2 - x_1)$ là:

$x^2 - 7x - 71 \qquad (*)$

b) $A = |2x_1 - x_2| + |2x_2 - x_1|$

Đặt $a = 2x_1 - x_2$, $b = 2x_2 - x_1$ thì a và b là các nghiệm của (*)

Do đó: $\begin{cases} a + b = 7 \\ ab = -71 \end{cases}$. Ta có $A = |a| + |b| \geq 0$, suy ra $A^2 = a^2 + b^2 + 2|ab|$

$= (a + b)^2 - 2ab + 2|ab| = 49 \Rightarrow A = 7$

Câu 3:

a) $\sqrt{x + 1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x + 8}} \qquad (1)$

Điều kiện $x \geq -1$; $x \geq -8$; $x \geq \sqrt{x + 8}$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{x - \sqrt{x+8}} + 1 \Leftrightarrow x + 1 = x - \sqrt{x+8} + 2\sqrt{x - \sqrt{x+8}} + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x - \sqrt{x + 8}} = \sqrt{x + 8} \Leftrightarrow 4\left(x - \sqrt{x + 8}\right) = x + 8$

$\Leftrightarrow 3x - 8 = 4\sqrt{x + 8} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 48x + 64 = 16(x + 8) \\ x \geq \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$

Thử lại thấy x = 8 là nghiệm của (1)

b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (2)

Đặt $x^2 = t$, (2) trở thành: $t^2 - 13t + 36 = 0$ $(t \geq 0)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 9 \end{array}\right.$

Với $t = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; với $t = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

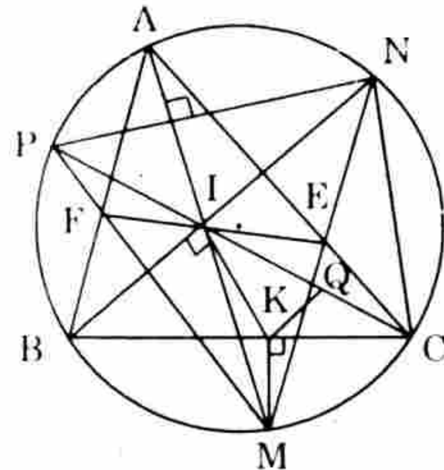
Câu 4:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $-x^2 = 2x - m^2 + 2m$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - m^2 + 2m = 0$ (1)

(D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Câu 5:



a) Ta có $\widehat{ACN} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{NA}$)

$\widehat{ICN} = \widehat{ICA} + \widehat{ACN}$

$= \widehat{ICA} + \widehat{ABN} = \dfrac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{C}\right)$

$\widehat{NIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \dfrac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{C}\right)$

Suy ra $\widehat{NIC} = \widehat{NCI}$

Vậy ΔNIC cân tại N

b) ΔNIC cân tại N, có NM là phân giác của góc INC nên MN là đường trung trực của IC, suy ra $PC \perp MN$

Tương tự ta có: $MA \perp NP$, $NB \perp PM$. 3 đường cao MA, NB và PC của ΔMNP cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác đó

c) Theo câu b) MN là đường trung trực của IC nên EI = EC

Tam giác EIC cân tại E suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{ECI}$. Mặt khác $\widehat{ECI} = \widehat{ICB}$

Suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{ICB} \Rightarrow IE // BC$. Tương tự IF//BC

Qua điểm I ngoài đường thẳng BC có IE và IF cùng song song với BC nên IE trùng IF hay ba điểm E, I, F thẳng hàng

d) Gọi Q là trung điểm của IC thì KQ // IB mà $IB \perp IK \Rightarrow KQ \perp IK$

KQ là đường trung bình của ΔBIC nên $KQ = \dfrac{1}{2}BI$, mà $IK = \dfrac{1}{2}BI$

$\Rightarrow KI = KQ$. Tam giác KIQ vuông cân tại K $\Rightarrow \widehat{KIQ} = 45^0$

Mặt khác ta có IK // MP (vì cùng vuông góc với BI)

nên $\widehat{MPC} = \widehat{KIC} = 45^0$

Mà $\widehat{MPC} = \widehat{MAC}$, do đó $\widehat{MAC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

ĐỀ 29

Câu 1: *Giải các phương trình sau:*

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} = 2x - 1$ b) $(x^2 - 4x)^2 + 3(x^2 - 4x) - 4 = 0$

Câu 2:

Cho biểu thức: $M = \left(\dfrac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \dfrac{x + \sqrt{x}}{x - 1}\right) \cdot \dfrac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa

b) Rút gọn M

Câu 3: *Cho phương trình:* $x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2}$ *(1)*

a) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất, tính nghiệm đó với $m = \sqrt{2} + 1$

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ *là nghiệm*

Câu 4: *Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định với OA = 2R, đường kính BC quay quanh O sao cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai I. Đường thẳng AB, AC lại cắt (O; R) lần lượt tại D, E với* $D \neq B; C \neq E$*. Nối DE cắt đường thẳng OA tại K*

a) Chứng minh rằng: OI.OA = OB.OC và AK.AI = AE.AC

b) Tính độ dài đoạn OI và đoạn AK theo R

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định F $(F \neq A)$ *khi BC quay quanh O*

Câu 5: *Cho biểu thức:* $M = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Tìm cặp số (x; y) để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó

Giải

Câu 1:

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} = 2x - 1$. Điều kiện : $x \geq 0$

Đặt $a = \sqrt{3x}$, $b = \sqrt{x+1}$, $a, b \geq 0$

Ta có: $b - a = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) = 0$

Mà $a + b + 1 > 0 \Rightarrow a = b$. Do đó $\sqrt{3x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3x = x + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$

b) $(x^2 - 4x)^2 + 3(x^2 - 4x) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 - 1 + 3[(x^2 - 4x) - 1] = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x - 1)[(x^2 - 4x + 1) + 3] = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x - 1)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x - 1 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \pm \sqrt{5} \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x = 2 + \sqrt{5}$; $x = 2$; $x = 2 - \sqrt{5}$

Câu 2:

a) M có nghĩa khi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ 2x + \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(2\sqrt{x} - 1\right) \neq 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

b) $$M = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right) \cdot \frac{x - 1}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(2\sqrt{2} - 1\right)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{\left(x + \sqrt{x} + 1\right)\left(2\sqrt{x} - 1\right)} = \frac{\left(2\sqrt{x} - 1\right)\left(x + \sqrt{x}\right)}{\left(x + \sqrt{x} + 1\right)\left(2\sqrt{x} - 1\right)} = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

Câu 3:

$x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2}$ (1)

a) (1) $\Leftrightarrow \left(1 + m\sqrt{2}\right)x = m^2 + 3 - \sqrt{2}$ (2)

(2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi : $1 + m\sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $x = \dfrac{m^2 + 3 - \sqrt{2}}{1 + m\sqrt{2}}$ với $m = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x = \dfrac{6 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \dfrac{16 - 3\sqrt{2}}{7}$

b) Phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ là nghiệm nên:

$5\sqrt{2} - 6 = m^2 + 3 - \sqrt{2} - m\sqrt{2}\left(5\sqrt{2} - 6\right)$

$\Leftrightarrow m^2 + \left(6\sqrt{2} - 10\right)m + 9 - 6\sqrt{2} = 0$

Giải phương trình này ta được $m_1 = 1$; $m_2 = 9 - 6\sqrt{2}$

Vậy có 2 giá trị $m = 1$; $m_2 = 9 - 6\sqrt{2}$ thỏa điều kiện bài toán

Câu 4:

a) Ta có: $\Delta BOI \backsim \Delta AOC$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{OI}{OC} \Rightarrow OB.OC = AO.OI$

Ta có: $\widehat{AEK} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với góc $\widehat{CED}$) mà $\widehat{AIC} = \widehat{ABC}$

Suy ra: $\widehat{AEK} = \widehat{AIC}$

Lại có: $\Delta AEK \backsim \Delta AIC$ (g – g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AI} = \dfrac{AK}{AS} \Rightarrow AE.AC = AK.AI$

b) Từ $OI.OA = OB.OC = R^2$ (theo câu a)

$\Rightarrow OI = \dfrac{R^2}{OA} = \dfrac{R^2}{2R} = \dfrac{R}{2}$

$AI = AO + OI = 2R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{5R}{2}$

Kẻ tiếp tuyến AT với đường tròn (O)

Ta có: $AE.AC = AT^2 = AO^2 - OT^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

Mà $AE.AC = AK.AI \Rightarrow AK = \dfrac{AE.AC}{AI} = \dfrac{3R^2}{\frac{5R}{2}} = \dfrac{6R}{R}$

c) Gọi giao điểm của đường thẳng IK với đường tròn (O; R) là H và J

Ta có: $KH.KJ = KD.KE$ mà $AK = \dfrac{6R}{5} \Rightarrow OK = 2R - \dfrac{6R}{5} = \dfrac{4R}{5}$

$\Rightarrow KJ = \dfrac{4R}{5} + R = \dfrac{9R}{5} \Rightarrow KH = \dfrac{R}{5}$

Vậy $KD.KE = \dfrac{9R}{5}.\dfrac{R}{5} = \dfrac{9R^2}{25}$. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt OA tại F. Ta có: $KF.KA = KD.KE$, suy ra:

$\Rightarrow KF = \dfrac{KD.KE}{KA} = \dfrac{9R^2}{25} : \dfrac{6R}{5} = \dfrac{3R}{10}$ suy ra điểm F cố định

Câu 5:

$M = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

$\Leftrightarrow 2M = 8 - [(x-y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2] \le 8 \quad \Leftrightarrow \quad M \le 4$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 4 đạt được

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

ĐỀ 30

Câu 1: *Cho biểu thức:*

$$A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

với $x > 0,\ y > 0$

a) *Rút gọn A*

b) *Biết* $xy = 16$. *Tính các giá trị x, y để A có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó*

Câu 2: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P):* $y = -x^2$ *và đường thẳng (d) đi qua* $I(0;\ -1)$ *có hệ số góc k*

a) *Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh với mọi giá trị k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt*

b) *Gọi hoành độ của A và B là* x_1 *và* x_2. *Chứng minh* $|x_1 - x_2| \geq 2$

c) *Chứng minh tam giác OAB vuông*

Câu 3: *Giải các phương trình*

a) $|2x^2 - 5x + 1| = 3x - 1$ b) $-x^2 + 2 = \sqrt{2 - x}$

Câu 4: *Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện:*

$x + y + z + xy + yz + zx = 6$. *Chứng minh rằng* $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

Câu 5: *Cho đường tròn (O; R) và dây MN cố định. Gọi P là điểm chính giữa cung nhỏ MN. Lấy điểm I bất kỳ trên cung nhỏ PN rồi vẽ tia Mx vuông góc với PI tại K và cắt NI kéo dài tại E*

a) *Chứng minh* $\widehat{PIE} = \widehat{PMN}$ *và IP là tia phân giác góc MIE*

b) *Chứng minh P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE và góc MNE không phụ thuộc vào vị trí điểm I*

c) *Tia EP cắt MN tại F và cắt đường tròn (O) tại G, chứng minh rằng MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFG*

d) *Chứng minh tích PE.PG không đổi khi I chạy trên cung nhỏ PN. Tính tích này theo R và góc* $\widehat{PMN}$ *bằng* α

Giải

Câu 1:

a) $$A = \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{x+y}{xy}\right)\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)+\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(x+y)}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{xy}\right) : \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$$

b) Ta có: $\left(\sqrt{\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}$

Do đó $A = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \geq 2\dfrac{\sqrt{\sqrt{xy}}}{\sqrt{xy}} = \dfrac{2\sqrt{\sqrt{16}}}{\sqrt{16}} = 1$ (do $xy = 16$)

Vậy A có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4$

Câu 2:

a) Phương trình đường thẳng (d) : $y = kx - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 + kx - 1 = 0$ (1)

Vì (1) có $\Delta = k^2 + 4 > 0\ \forall k$ nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Ta có: $x_1.x_2 = -1 \Rightarrow |x_1 - x_2| = \left|x_1 + \dfrac{1}{x_2}\right|$

Nhận xét rằng x_1 và $\dfrac{1}{x_1}$ cùng dấu nên $\left|x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right| = |x_1| + \dfrac{1}{|x_1|} \geq 2$

Vậy $|x_1 - x_2| \geq 2$

c) Phương trình đường thẳng OA là: $y = -x_1x$

Phương trình đường thẳng OB là: $y = -x_2x$

Vì $(-x_1)(-x_2) = -1$ nên tam giác OAB vuông tại O

Câu 3:

a) $|2x^2 - 5x + 1| = |3x - 1| \Leftrightarrow (2x^2 - 5x + 1)^2 - (3x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 - 2x)(2x^2 - 8x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm: $x = 0$; $x = 1$; $x = 2 + \sqrt{3}$; $x = 2 - \sqrt{3}$

Câu 4:

Ta có: $x^2 + 1 \geq 2x$; $y^2 + 1 \geq 2y$; $z^2 + 1 \geq 2z$

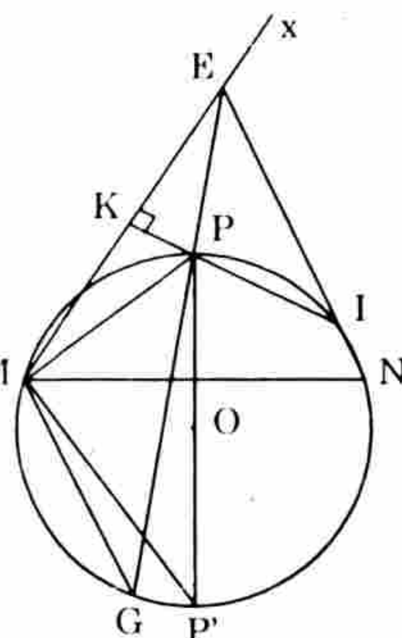
$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2(x + y + z + xy + yz + zx)$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$



Câu 5:

a) Do tứ giác PINM nội tiếp đường tròn (O)

nên $\widehat{PIE} = \widehat{PMN}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{PIM} = \widehat{PMN}$ (do PM = PN) (2)

Từ (1) và (2) có: $\widehat{PIE} = \widehat{PIM}$ hay IP là tia phân giác của góc MIE

b) ΔMIE cân (đường cao IK vừa là phân giác), do đó IK là trung trực của ME

$\Rightarrow$ PM = PE (3)

Do $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PN}$ nên PM = PN (4)

Từ (3) và (4) suy ra PM = PE = PN, do đó P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNE. Đường tròn này cố định (vì P cố định và bán kính PM không đổi), do đó cung MEN có độ lớn không đổi và không phụ thuộc vào vị trí của điểm I trên cung PN

c) Ta có: sđ$\widehat{PMN} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{PN}$; sđ$\widehat{MGP} = \dfrac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{PM}$; $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{PN}$

Do đó: $\widehat{PMN} = \widehat{MGP}$. Suy ra MP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MFG

d) Xét ΔPMF và ΔPGM. Có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{PMF} = \widehat{MGP}$

Do đó ΔPMF ~ ΔPGM $\Rightarrow \dfrac{PM}{PG} = \dfrac{PF}{PM} \Rightarrow PF.PG = PM^2$ không đổi I chạy trên cung nhỏ PN

Vẽ đường kính PP' rồi xét tam giác PMP' vuông tại M ta có $\widehat{MP'P} = \widehat{MGP}$

Do cùng chắn MP), $\widehat{PMN} = \alpha = \widehat{MGP}$ (chứng minh trên), do đó

$\widehat{MP'P} = \alpha$. Vậy PM = PP'sinα

nên t ch $PF.PG = MP^2 = (2R)^2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\alpha$

ĐỀ 31

Câu 1:

a) *Tính* $A = \left(\sqrt{11+2\sqrt{30}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

b) *Thu gọn biểu thức:* $B = \sqrt{6-2\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}$

Câu 2: *Giải các phương trình và hệ phương trình sau :*

a) $\sqrt{5-x} = 2x - 7$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

Câu 3: *Cho phương trình:* $x^2 - 2\sqrt{m^2-2m}.x + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (1)$

a) *Định m để phương trình (1) có nghiệm*

b) *Định m để tổng bình phương hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất*

Câu 4:

a) *Chứng minh rằng biểu thức:* $A = a^2 + b^2 - 2ab + a - b + 1$ *luôn dương với mọi a và b*

b) *Cho ba số dương x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Câu 5: *Cho tam giác ABC có* $\widehat{A} = 60^0$, $AC = b$, $AB = c$ *(với* $b > c$*). Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC*

a) *Chứng minh các tứ giác AIEJ và CMJE nội tiếp*

b) *Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK*

c) *Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c*

d) *Tính IH + JK theo b, c*

Giải

Câu 1:

a) $A = \left(\sqrt{11+2\sqrt{30}} - \sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

$= \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) = 3$

Vậy A = 3

b) $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}}$

$= \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{\left(4 - \sqrt{2}\right)^2}}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + 4 - \sqrt{2}}}$

$= \sqrt{6 - 2\sqrt{2\sqrt{3} + 4}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}}$

$= \sqrt{6 - 2\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{3} - 1$

Vậy $B = \sqrt{3} - 1$

Câu 2:

a) $\sqrt{5 - x} = 2x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ 5 - x = (2x - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 7 \\ 4x^2 - 27x + 44 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2} \\ (x - 4)(4x - 11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{11}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 6 & (1) \\ 3x + 2y = 7 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có: $x = \dfrac{6 - 3y}{2}$ thế vào (2) ta được $\dfrac{3}{2}(6 - 3y) + 2y = 7$

$\Leftrightarrow 18 - 5y = 14 \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = \dfrac{6 - 3y}{2} = \dfrac{9}{5}$

Vậy nghiệm (x; y) của hệ của là: $\left(\dfrac{9}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$

Câu 3:

$x^2 - 2\sqrt{m^2 - 2m}.x + m^2 - 3m + 2 = 0 \quad (1)$

a) Điều kiện: $m^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m < 0$ hay $m \geq 2$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' = m^2 - 2m - m^2 + 3m - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$. So với điều kiện ta nhận $m \geq 2$.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) ta có:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m^2 - 2m) - 2(m^2 - 3m + 2)$

$= 2m^2 - 2m - 4 = 2\left(m^2 - m + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{9}{2} = 2\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{2}$

Vì $m \geq 2 \Rightarrow m - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi m = 2. Vậy giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$ bằng 0 đạt được khi và chỉ khi m = 2

Câu 4:

a) $A = a^2 + b^2 - 2ab + a - b + 1 = (a-b)^2 + (a-b) + 1$

$$= (a-b)^2 + 2(a-b).\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left[(a-b) + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy $A = \left[(a-b) + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} > 0$

b) Ta chứng minh: $\sqrt{x + yz} \geq x + \sqrt{yz}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow x + yz \geq x^2 + 2x\sqrt{yz} + yz \Leftrightarrow 1 \geq x + 2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow x + y + z \geq x + 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow y + z \geq 2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \geq 0$. Do đó (1) đúng

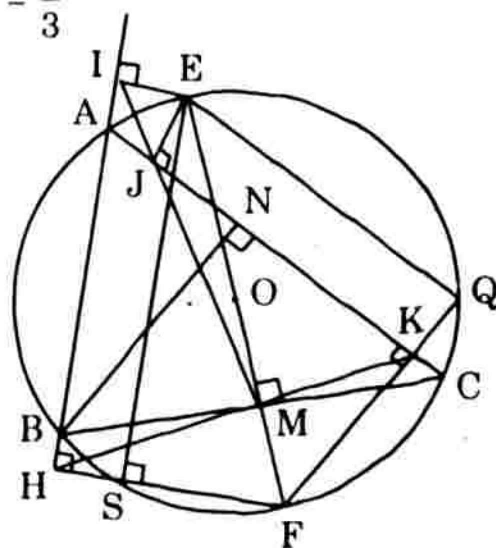
Tương tự ta có: $\sqrt{y + zx} \geq y + \sqrt{zx}$ (2)

$\sqrt{z + xy} \geq z + \sqrt{xy}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Câu 5:



a) Ta có: $\widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^0$

Suy ra tứ giác AIEJ nội tiếp đường tròn đường kính AE.

Lại có: $\widehat{CME} = \widehat{CJE} = 90^0$

Suy ra tứ giác CMJE nội tiếp đường tròn đường kính CE.

b) Ta có: $\widehat{IEM} = \widehat{AEC}$ (cùng bù $\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \widehat{AEI} = \widehat{CEM}$

Mặt khác: $\widehat{AEI} = \widehat{AJI}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AI}$); $\widehat{CEM} = \widehat{CJM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$)

$\Rightarrow \widehat{CJM} = \widehat{AJI}$. Vì I, M nằm về hai phía của đường thẳng AC nên I, J, M thẳng hàng. Tương tự, ta cũng chứng minh được H, K, M thẳng hàng

Do tứ giác CFMK nội tiếp nên $\widehat{CFK} = \widehat{CMK}$

Do tứ giác CMJE nội tiếp nên $\widehat{JME} = \widehat{JCE}$

Mặt khác $\widehat{ECF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CFK} = \widehat{JCE}$ (vì cùng bằng $90^0 - \widehat{ACF}$)

Từ đó ta có: $\widehat{CMK} = \widehat{JME} \Rightarrow \widehat{JMK} = \widehat{EMC} = 90^0$ hay $IJ \perp HK$

c) Kẻ BN vuông góc AC, vì $\widehat{BAC} = 60^0$ nên $\widehat{ABN} = 30^0$

$$\Rightarrow AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \Rightarrow BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$$

Ta có: $BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3}{4}c^2 + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\Rightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$. Tam giác đều BCE có:

$$R = CE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3.2} = \frac{1}{3}\sqrt{3\left(b^2 + c^2 - bc\right)}$$

d) Gọi S là giao điểm của SH với đường tròn O

Ta có tứ giác HSIE là hình chữ nhật nên IH = ES

Mặt khác AB // ES nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BS}$ mà $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow \overset{\frown}{EBC} = \overset{\frown}{AEC}$

Vậy ES = AC = b $\Rightarrow$ IH = b

Gọi Q là giao điểm của FK với đường tròn (O). Ta có tứ giác EJKQ là hình chữ nhật nên JK = EQ

Mặt khác EQ//AC nên $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CQ}$ mà $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow \overset{\frown}{EQ} = \overset{\frown}{AB}$

Vậy EQ = AB = c $\Rightarrow$ JK = b. Do đó IH + JK = b + c

ĐỀ 32

Câu 1: *Tính:*

1) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$; *2)*

$$\left(\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy}\right)\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right)^2$$

Câu 2:

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = 2x^2$

b) Trên đồ thị (P) ta lấy hai điểm A, B có hoành độ tương ứng là 1 và 2. Xác định các giá trị của m và n để đường thẳng $y = mx + n$ tiếp xúc với (P) và song song với AB

Câu 3: *Trong một cuộc đua, ba tay đua môtô đã khởi hành cùng một lúc. Mỗi giờ người thứ hai chạy chậm hơn người thứ nhất 15km và*

nhanh hơn người thứ ba 3km. Người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút và sớm hơn người thứ ba 3 phút. Tính vận tốc các tay đua

Câu 4: *Một điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm (O), đường kính AB. Gọi H, I lần lượt là hai điểm chính giữa các cung AM, MB, gọi Q là trung điểm của dây MB và K là giao điểm của AM, HI*

1) Tính độ lớn góc HKM

2) Vẽ IP ⊥ AM chứng minh IP tiếp xúc với đường tròn tâm O

3) Dựng hình bình hành APQR. Tìm tập hợp các điểm R khi M di động trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB

Giải

Câu 1:

a) Ta có $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)+\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)}$

$= \frac{2x}{x^2-\left(x^2-y^2\right)} = \frac{2x}{y^2}$

b) $\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2 = \left[\frac{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right]\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right]^2$

$= \left(\sqrt{x^2}+\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}+\sqrt{xy}\right)\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$ khi $x > 0$, $y > 0$

Câu 2:

a) Vẽ đồ thị (P) : $y = 2x^2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

b) Hệ số góc của đường thẳng qua A và B là $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-2}{2-1} = 6$

Vì $y = mx + n$ song song với AB nên $m = 6$

Để đường thẳng $y = 6x + n$ tiếp xúc với (P) thì phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 = 6x + n \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - n = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 2n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{9}{2}$

Tóm lại đường thẳng $y = mx + n$ tiếp xúc với (P) và song song với AB thì $m = 6$ và $n = -\frac{9}{2}$

Câu 3: Gọi x (km/h) là vận tốc người thứ hai, thì vận tốc người thứ nhất là (x + 15) (km/h) và vận tốc người thứ ba là (x − 3) (km/h). Gọi y(km/h) là chiều dài quãng đường

Điều kiện : x > 3, y > 0

Người thứ hai đến đích chậm hơn người thứ nhất 12 phút (tức là $\frac{1}{5}$ giờ). Theo đề bài ta có $\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}$ (1)

Người thứ hai đến đích sớm hơn người thứ ba 3 phút (tức là $\frac{1}{20}$ giờ)

Theo đề bài ta có: $\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}$ (2)

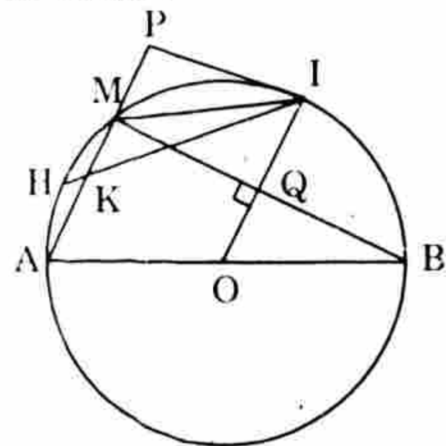
Từ (1) và (2) ta được $\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} - 4\left(\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x}\right) = 0$ (3)

Do y > 0 nên (3) trở thành:

$(x + 15)(x - 3) - x(x - 3) - 4x(x + 15) + 4(x + 15)(x - 3) = 0$

Giải phương trình ta có x = 75. Thay x = 75 vào (1) ta có y = 90

Vậy vận tốc các tay đua là 90km/h, 75km/h, 72km/h



1) Tính độ lớn góc HKM

Vì $\overset{\frown}{HA} = \overset{\frown}{HM}$ và $\overset{\frown}{IM} = \overset{\frown}{IB}$

nên $\overset{\frown}{HA} + \overset{\frown}{MI} = 90^0$

nên $\widehat{HKA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{HKM} = 135^0$

2) Vì $\overset{\frown}{IM} = IB$ nên đường kính IO vuông góc với MB tại chính trung điểm Q của MB. Tứ giác PMQI có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật

Suy ra $\widehat{OIP} = 1$ vuông hay OI ⊥ PI tức là PI là tiếp tuyến của đường tròn tâm O

3) Vì PMQI là hình chữ nhật nên $\widehat{MPQ} = \widehat{MIQ}$ (1)

Và APQP là hình bình hành nên $\widehat{MPQ} + \widehat{PAR} = 2$ vuông (2)

Từ (1), (2) suy ra: $\widehat{MPQ} + \widehat{PAR} = 2v$, do đó tứ giác AMIR nội tiếp được trong đường tròn

Qua 3 điểm không thẳng hàng A, M, I chỉ dựng được một đường tròn duy nhất, biết A, M, I nằm trên nửa đường tròn đường kính AB, nên R cũng phải nằm trên đường tròn đường kính AB này (R thuộc nửa đường tròn không chứa M)

Đảo lại nếu lấy R' bất kỳ thuộc nửa đường tròn đường kính AB không chứa M. Dựng đường kính R'OI'

Từ B dựng BM' ⊥ OI', BM' cắt OI' tại Q. Hạ I'P' ⊥ AM'

Dễ dàng chứng minh được AP'Q'P' là hình bình hành

Vậy tập hợp điểm R khi M di động trên nửa đường tròn đường kính AB đã cho là nửa đường tròn đường kính AB không chứa điểm M

ĐỀ 33

Câu 1:

Cho biểu thức: $A = \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{3\sqrt{a}-1} - \dfrac{1}{1+3\sqrt{a}} + \dfrac{8\sqrt{a}}{9a-1}\right) : \left(1 - \dfrac{3\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}+1}\right)$

a) Rút gọn A *b) Tìm các giá trị của a để* $A = \dfrac{6}{5}$

Câu 2: *Cho phương trình* $2x^2 - 6x + m = 0$

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm dương

b) Với giá trị nào của m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 *sao cho* $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = 3$

Câu 3: *Đúng 6 giờ sáng một xe đạp xuất phát từ A để đến B và đúng 7 giờ sáng cùng ngày một người đi ôtô xuất phát từ B để đến A, 16 phút sau khi gặp nhau người đi ôtô về đến A và 1 giờ 40 phút sau khi gặp người đi xe đạp về đến B. Hỏi mỗi người đã đi hết quãng đường AB mất bao lâu ? Biết vận tốc mỗi người không đổi trong suốt quãng đường*

Câu 4: *Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O, bán kính R, CD là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho* $CD = R\sqrt{2}$ *(A, C, D, B theo thứ tự ấy trên nửa đường tròn và C, D không trùng với A, B) Hai tia AC và BD cắt nhau tại E*

1) Tính số đo của góc COD

2) Tìm tập hợp các trung điểm của dây cung CD

3) Tính số đo của góc AEB và suy ra tập hợp các điểm E

4) Gọi F là giao điểm của CD và AB, K là giao điểm của phân giác của các góc AEB và AFC. Chứng minh góc EKF vuông

Giải

Câu 1:

a) Rút gọn

Điều kiện để A có nghĩa là $a \geq 0$, $9a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{9}$

$$A = \left(\frac{(\sqrt{a} - 1)(3\sqrt{a} + 1) - (3\sqrt{a} - 1)}{9a - 1} + \frac{8\sqrt{a}}{9a - 1}\right) : \left(\frac{3\sqrt{a} + 1 - 3\sqrt{a} + 2}{3\sqrt{a} + 1}\right)$$

$$A = \frac{a + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} - 1}$$

b) Tìm các giá trị của a để $A = \frac{6}{5}$

$$A = \frac{a + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} - 1} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 5a + 5\sqrt{a} = 18\sqrt{a} - 6 \Leftrightarrow 5a - 13\sqrt{a} + 6 = 0 \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{a} = x$ thì (1) có dạng $5x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

Từ $\sqrt{a} = x \Rightarrow a = x^2$. Do đó $a = x_1^2 = 2^2 = 4$; $a = x_2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

Với $a = 4$; $a = \frac{9}{25}$ thỏa mãn điều kiện $a \geq 0$, $a \neq \frac{1}{4}$. Vậy với $a = 4$ hoặc $a = \frac{9}{25}$ thì $A = \frac{6}{5}$

Câu 2:

Phương trình $x^2 - 6x + m = 0$

a) Phương trình có 2 nghiệm dương khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{2}$$

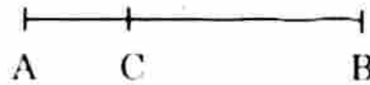
. Đáp số: $0 < m < \frac{9}{2}$

b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 3 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{9 - m}{\frac{m}{2}} = 3 \Leftrightarrow 18 - 2m = 3m \Leftrightarrow m = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$

Câu 3:

Gọi C là vị trí hai người gặp nhau



Gọi x (h) là thời gian ôtô đi từ B đến C

Quãng đường $AC = (x+1)V_1 = \frac{4}{15}V_2$ (1)

Quãng đường $BC = \frac{5}{3}V_1 = x \times V_2$ (2)

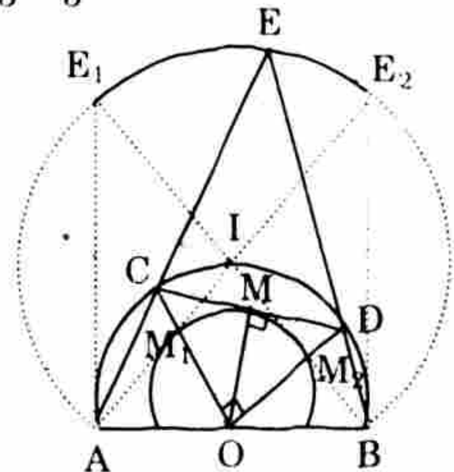
Chia (1) cho (2) vế theo vế ta có: $\frac{3(x+1)}{5} = \frac{4}{15x}$

Giải phương trình ta có $x = \frac{1}{3}$

Thời gian ôtô đi quãng đường AB là $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15}$(h)

Thời gian xe đạp đi quãng đường AB là $1.\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 3$(h)

Câu 4:



1) Do độ dài $CD = R\sqrt{2}$ là cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R nên CD trương cung $\overset{\frown}{CD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{COD} = 90^0$

2) Gọi M là trung điểm của CD, ΔCOD vuông tại O, ta có $OM = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

a) Phần thuận: $OM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ không đổi, và O cố định nên M di động trên đường tròn tâm O bán kính $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

b) Giới hạn:

- Khi C dần đến A; D dần đến I (I là điểm chính giữa của nửa đường tròn AB có chứa C, D) thì M đến M_1 (M_1 là trung điểm của IA)
- Khi D dần đến B, C dần đến I thì M dần đến M_2 (M_2 là trung điểm của IB)

  Vậy M_1, M_2 là hai điểm giới hạn của M: M chỉ chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{M_1M_2}$ (như hình vẽ, loại 2 điểm M_1, M_2)

c) Phần đảo: lấy điểm M' bất kỳ trên cung $\overset{\frown}{M_1M_2}$ ở phần giới hạn trên

- Vẽ dây cung C'D' của đường tròn (O; R) vuông góc với OM' tại M' ta có M' là trung điểm C'D'
- Định lý Pitago trong tam giác vuông C'M'O ta có:

$$C'M' = \sqrt{OC'^2 - OM'^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra $C'D' = 2C'M' = R\sqrt{2}$

Vậy điểm M' thỏa mãn các điều kiện của đề bài (trung điểm của dây cung có độ dài $R\sqrt{2}$)

Kết luận: Tập hợp các điểm M là cung nhỏ M_1M_2 (loại M_1, M_2) thuộc đường tròn tâm O, bán kính $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

3) Ta có $\widehat{AEB}$ là góc có đỉnh nằm ngoài (O; R) nên

$$sđ\widehat{AEB} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(180^0 - 90^0\right) = 45^0$$

a) Phần thuận: góc $\widehat{AEB} = 45^0$ không đổi nên E di động trên cung chứa góc 45^0 vẽ qua A, B (xem hình vẽ)

b) Giới hạn:

- Khi C tiến tới A: AC thành tiếp tuyến tại A của (O), cắt cung chứa góc 45^0 (ở trên) tại E_1 (E_1 cũng là giao điểm của BI với cung chứa góc 45^0 vẽ qua A, B)
- Khi C tiến tới B: BD thành tiếp tuyến tại B của (O), cắt cung chứa góc 45^0 (ở trên) tại E_2 (E_2 cũng là giao điểm của AI với cung chứa góc 45^0 vẽ qua A, B)

Do đó : E chỉ chuyển động trên phần cung $\overset{\frown}{E_1E_2}$ (như hình vẽ, loại 2 điểm E_1, E_2)

c) Phần đảo:

- Lấy điểm E' bất kỳ trên phần đã giới hạn ở trên cung $\overset{\frown}{E_1E_2}$. Nối AE, BE' cắt nửa đường tròn tại C'D'
- $\widehat{AE'B}$ là góc có đỉnh ở ngoài (O) nên $sđ\widehat{AE'B} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{C'D'}\right)$

$\Leftrightarrow 2.45^0 = 180^0 - sđ\overset{\frown}{C'D'} \Leftrightarrow sđ\overset{\frown}{C'D'} = 90^0$

Do đó C'D' trương cung có số đo 90^0 là cạnh của hình vuông nội tiếp trong đường tròn (O; R) suy ra $C'D' = R\sqrt{2}$

Vậy E' thỏa mãn các điều kiện của đề bài

Kết luận: Tập hợp các điểm E là cung nhỏ $\overset{\frown}{E_1E_2}$ (như hình vẽ, loại E_1, E_2)

4) Gọi J là giao điểm của EK và CD

- $sđ\widehat{F_1} = \frac{sđ\overparen{AFC}}{2} = \frac{1}{4}\left(sđ\overparen{AC} - sđ\overparen{DB}\right)$ (1)
- $sđ\widehat{J_1} = sđ\widehat{E_1} + sđ\widehat{D_1}$ (góc ngoài của ΔEDJ)

$= \frac{1}{2}sđ\,\overparen{AEB} + 180^0 - sđ\,\widehat{D_2}$ ($\widehat{D_1}, \widehat{D_2}$ kề bù)

$= \frac{1}{4}\left(sđ\,\overparen{AB} - sđ\,\overparen{CD}\right) + 180^0 - \frac{1}{2}\overparen{BAC}$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có:

$sđ\,\widehat{F_1} + sđ\,\widehat{J_1} = \frac{1}{4}\left(sđ\,\overparen{AC} - sđ\,\overparen{DB} + sđ\,\overparen{AB} - sđ\,\overparen{CD}\right) + 180^0 - \frac{1}{2}sđ\,\overparen{BAC}$

$= \frac{1}{4}\left(sđ\,\overparen{AC} + sđ\,\overparen{AB}\right) - \frac{1}{4}\left(sđ\,\overparen{DB} + sđ\,\overparen{CD}\right) + 180^0 - \frac{1}{2}sđ\,\overparen{BAC}$

$= 180^0 + \frac{1}{4}sđ\,\overparen{BAC} - \frac{1}{2}sđ\,\overparen{BAC} - \frac{1}{4}sđ\,\overparen{BDC}$

$= 180^0 - \frac{1}{4}\left(sđ\,\overparen{BAC} + sđ\,\overparen{BDC}\right) = 180^0 - \frac{1}{4}\left(sđ\,\overparen{BACDB}\right)$

$= 180^0 - \frac{360^0}{4} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{J_1} = 90^0 \Rightarrow \Delta KJF$ vuông tại K. Vậy $\widehat{EKF}$ là góc vuông

ĐỀ 34

Câu 1: *Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (P)*

a) Xác định các hệ số a, b, c biết rằng đồ thị (P) của hàm số đi qua các điểm A(0; –1); B(1; 0) và C(–1; 2)

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = mx - 1$ tiếp xúc với đồ thị của hàm số vừa xác định ở câu a

Câu 2: *Cho biểu thức $A = -2x^3 + 4x^2 - x - 1$*

Tính giá trị của A khi $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Câu 3: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 5x - y = 1 \end{cases}$ *(1)*

a) Giải hệ phương trình (1) khi m = 3

b) Tìm giá trị của m để hệ (1) có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x > 0$, $y < 0$

Câu 4: *Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Từ điểm D nằm giữa O và C vẽ đường thẳng vuông*

góc với BC, cắt các đường thẳng AB, AC tại E, F và cắt (O) tại I, K. CE cắt (O) tại J

1) Chứng tỏ D là trungđiểm của IK và C là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{IK}$

2) Chứng minh 3 điểm B, F, J thẳng hàng

3) Chứng minh FA.FC = FD.FE = FI.FK

4) Chứng tỏ 2 tiếp tuyến của (O) tại A, J và đường thẳng EF đồng qui tại một điểm, điểm này có vị trí đặc biệt gì trên đoạn EF?

Giải

Câu 1:

a) (P) đi qua A(0 ; −1) $\Rightarrow -1 = c$

(P) đi qua B(1 ; 0) $\Rightarrow 0 = a + b - 1$

(P) đi qua C(−1 ; 2) $\Rightarrow 2 = a - b - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$. Vậy (P) $y = 2x^2 - x - 1$

b) Đường thẳng $y = mx - 1$ tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình $2x^2 - x - 1 = mx - 1$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow 2x^2 - (m + 1)x = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = (m + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Câu 2: Ta có $A = -2x^3 + 4x^2 - x - 1 = (2 - x)(2x^2 + 1) - 3$

Thay $x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ vào ta có: $A = \left(\dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2}{2} + 1\right) - 3 = 0$

Câu 3:

a) Giải hệ phương trình khi m = 3

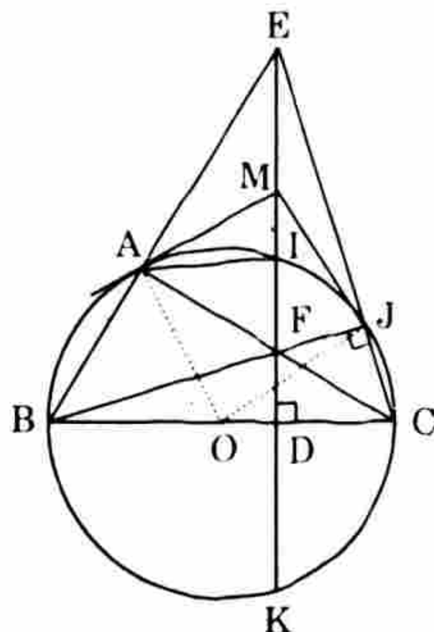
Khi m = 3 ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{17} \\ y = \dfrac{13}{17} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 + m}{17} \\ y = \dfrac{5(m + 3)}{17} - 1 = \dfrac{5m - 2}{17} \end{cases}$

Vì điều kiện $x > 0$, $y < 0$ ta có: $\begin{cases} \dfrac{3 + m}{17} > 0 \\ \dfrac{5m - 2}{17} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \dfrac{2}{5}$

Câu 4:



1) BC là đường kính của (O) vuông góc với dây cung IK tại D và cắt cung $\overset{\frown}{IK}$ tại C nên ta được

- D là trung điểm dây cung IK
- C là trung điểm cung $\overset{\frown}{IK}$ (vì có 2 góc $\widehat{IOC} = \widehat{COK}$)

2) ΔEBC có 2 đường cao là CA và ED cắt nhau tại F nên F là trực tâm của Δ

- Trong (O): $\widehat{BJC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{BJC} = 90^o \Rightarrow BJ \perp CE$

Vậy BJ cũng là đường cao của ΔEBC

Suy ra trực tâm F nằm trên BJ, nói cách khác: 3 điểm B, F, J thẳng hàng

3) Hai tam giác vuông AFE và DFC có góc F bằng nhau góc đối đỉnh nên chúng đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AF}{DF} = \dfrac{FE}{FC} \Leftrightarrow FA.FC = FD.FE$ (1)

Hai tam giác FAI và FCK có: $\widehat{IFA} = \widehat{CFK}$ (đối đỉnh); $\widehat{FAI} = \widehat{FKC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CI}$)

Do đó $\Delta FAI \sim \Delta FKC \Rightarrow \dfrac{FA}{FK} = \dfrac{FI}{FC} \Leftrightarrow FA.FC = FI.FK$ (2)

Vậy từ 2 đẳng thức (1) và (2) ta được: FA.FC = FD.FE = FI.FK

4) Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và EF

- $\widehat{MAC}$ là góc hợp bởi tia tiếp tuyến AM và dây cung AC của (O) nên sđ $\widehat{MAC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC}$
- $\widehat{AFM}$ là góc có đỉnh ở trong (O) nên

$$\text{sđ } \widehat{AFM} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AI} + \text{sđ}\overset{\frown}{CK}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AI} + \text{sđ}\overset{\frown}{CI}\right) \quad (\overset{\frown}{CK} = \overset{\frown}{CI} \text{ theo chứng minh trên})$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AIC}$$

Do đó $\widehat{MAF} = \widehat{AFM} \Rightarrow \Delta MAF$ cân tại M $\Rightarrow$ MA = MF

Ta suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{MAE}$ (vì cùng phụ với $\widehat{AFM} = \widehat{MAF}$)

Do đó ΔMAE cân tại M $\Rightarrow$ MA = ME

Vậy: trong tam giác vuông AFE ta có MA = ME = MF nói khác đi M là trung điểm cạnh huyền EF

- Trong ΔJEF vuông tại J, trung tuyến $JM = \frac{EF}{2} \Rightarrow MJ = MA$

Xét 2 tam giác AMO và JMO có 3 cạnh bằng nhau đôi một (AO = OJ = R, MO chung và MA = MJ (theo chứng minh trên)

Nên $\Delta AMO = \Delta JMO \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MJO} = 90^\circ$

Do đó MJ cũng là tiếp tuyến của (O)

Vậy: 2 tiếp tuyến của (O) tại A và J cùng cắt EF tại trung điểm M của đoạn EF

ĐỀ 35

Câu 1: *Cho phương trình* $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

a) *Chứng tỏ rằng phương trình trên luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m*

b) *Tìm m để có tích của hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất*

Câu 2: *Thu gọn các biểu thức sau*

$$A = \left(2\sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)\left(1 - \frac{2}{a + 1}\right)^2 \quad \text{với } a > 0,\ a \neq 1$$

Câu 3:

a) *Một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi là 48cm, người ta cắt bỏ mỗi góc một hình vuông có cạnh 2cm, rồi gấp lên thành hình hộp chữ nhật không có nắp có thể tích là* $96cm^3$. *Tính các kích thước của tấm tôn hình chữ nhật*

b) *Giải phương trình* $|x| - |x - 2| = 2$

Câu 4: *Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B (tâm của đường tròn này ở ngoài đường tròn kia) gọi AC, AD lần lượt là đường kính của (O) và (O')*

1) *Chứng minh rằng OO' vuông góc với AB tại trung điểm của AB*

2) *Chứng minh C, B, D thẳng hàng và CD = 2OO'*

3) *Qua B vẽ đường thẳng cắt (O) tại E cắt (O') tại F (B nằm giữa E và F) chứng tỏ số đo góc EAF luôn luôn không đổi.*

4) *Tiếp tuyến của (O) tại E và tiếp tuyến của (O') tại F cắt nhau tại I. Chứng tỏ cát tuyến BEF quay quanh B, góc EIF có số đo không đổi và 4 điểm A, E, I, F luôn luôn nằm trên cùng 1 đường tròn*

Giải

Câu 1:

a) $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

Ta có $\Delta' = (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 1 > 0$

Suy ra phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m

b) Theo định lý Viét $P = x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 3m + 2}{4} = \dfrac{1}{4}\left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{16} \geq -\dfrac{1}{16}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

Vậy $P = x_1x_2$ nhỏ nhất bằng $-\dfrac{1}{16}$ xảy ra $\Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

Câu 2:

a) $A = \left(\sqrt{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{5} + 1\right)^2}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right) = 8$

$B = \left(\dfrac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + \dfrac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)\left(1 - \dfrac{2}{a + 1}\right)^2 = \left(\dfrac{a - 2\sqrt{a} + 1 + a + 2\sqrt{a} + 1}{a - 1}\right)\left(\dfrac{a - 1}{a + 1}\right)^2$

$= \dfrac{2(a + 1)}{a - 1}.\left(\dfrac{a - 1}{a + 1}\right) = \dfrac{2(a - 1)}{a + 1}$

Câu 3:

a) Chu vi miếng tôn là 48cm nên nửa chu vi là 24cm

Gọi x(cm) là chiều rộng miếng tôn $x > 0$ thì $(24 - x)$(cm) là chiều dài $0 < x < 12$. Khi cắt bỏ 4 góc bốn hình vuông cạnh 2 cm thì chiều rộng còn lại là $(x - 4)$(cm), chiều dài còn lại là $(20 - x)$(cm)

Giả thiết ta có $(x - 4)(20 - x).2 = 96$

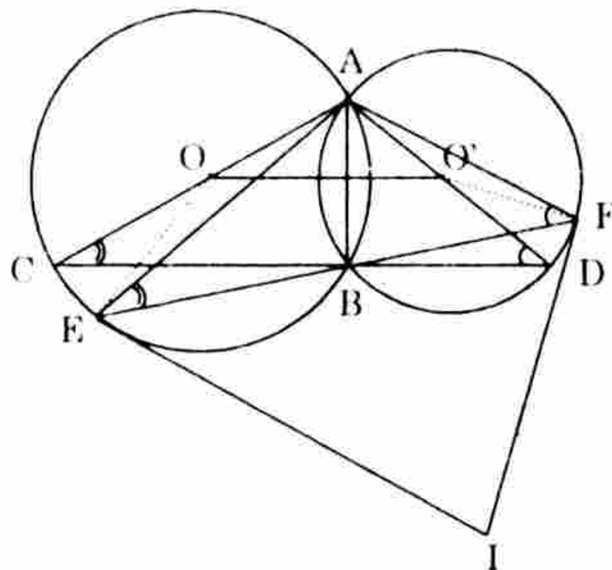
$\Leftrightarrow (x - 4)(20 - x) = 48 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 128 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 8,\ x_2 = 16$ (loại)

b) Giải phương trình $|x| - |x - 2| = 2 \quad (1)$

- Khi $x \leq 0$ thì (1) trở thành: $-x + x - 2 = 0$ (VN)
- Khi $0 < x < 2$ thì (1) trở thành: $x + x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 2$ (loại)
- Khi $x \geq 2$ thì (1) trở thành: $x - x + 2 = 2$: phương trình vô số nghiệm $x \geq 2$

Vậy khi $x \geq 2$: phương trình (1) có vô số nghiệm $x \geq 2$

Câu 4:



1) O, O' là hai điểm cách đều A và B nên đường thẳng OO' là đường trung trực của AB. Vậy OO' ⊥ AB tại trung điểm của AB hay nói OO' là đường trung trực

2) • $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O), (O') nên là 2 góc vuông suy ra $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ là 2 góc kề bù. Vậy 3 điểm C, B, D thẳng hàng

• Trong ΔACD, OO' là đường trung bình nên OO'//CD và $OO' = \frac{CD}{2}$

3) • $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (2 góc nội tiếp trong (O) cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{AFB} = \widehat{ADB}$ (2 góc nội tiếp trong (O') cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

• Suy ra hai tam giác AEF và ACD có hai góc bằng nhau đôi một nên góc thứ ba bằng nhau: $\widehat{EAF} = \widehat{CAD}$ có số đo không đổi (ΔAEF và ΔACD đồng dạng nhau)

4) • Trong (O): $\widehat{BEI} = \widehat{BAE}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến EI và dây cung EB, góc nội tiếp BAE cùng chắn cung $\overset{\frown}{BE}$)

Trong (O'), $\widehat{BFI} = \widehat{BAF}$ (tương tự như trên)

Suy ra: $\widehat{BEI} + \widehat{BFI} = \widehat{BAE} + \widehat{BAF} = \widehat{EAF}$ (vì tia AB nằm giữa 2 tia AE và AF)

• Do đã có $\widehat{EAF} = \widehat{CAD}$ (chứng minh trên) nên trong ΔIEF ta được:

$$\widehat{EIF} = 180^0 - \left(\widehat{IEF} + \widehat{IFE}\right) = 180^0 - \widehat{EAF}$$

Vậy $\widehat{EIF} = 180^0 - \widehat{CAD}$ không đổi

• Do đã có $\widehat{EIF} + \widehat{EAF} = 180^0$ nên 4 điểm A, E, I, F cùng nằm trên đường tròn (tứ giác có 2 góc đối diện bù nhau)

ĐỀ 36

Câu 1: *Cho phương trình* $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$

a) *Định m để phương trình có nghiệm*

b) *Định m để phương trình có hai nghiệm* x_1, x_2 *thỏa:* $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

Câu 2: *Cho biểu thức* $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x} - 1}$

a) *Rút gọn P ;* b) *Tìm giá trị nhỏ nhất của P*

Câu 3: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho Parabol (P):* $y = -x^2$ *và đường thẳng (d) đi qua điểm* $I(0, -1)$ *có hệ số góc k*

a) *Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh với mọi giá trị k, (d) luôn luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B*

b) *Gọi hoành độ của A và B là* x_1 *và* x_2*, chứng minh* $|x_1 - x_2| \ge 2$

Câu 4: *Cho nửa đường tròn đường kính AB và C, D là hai điểm trên đó, AC và AD cắt tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn lần lượt tại E, F*

a) *Chứng minh* $\widehat{ABD} = \widehat{AFB}$, $\widehat{ABC} = \widehat{AEB}$

b) *Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp được*

c) *Gọi I là trung điểm của FB. Chứng minh rằng DI là tiếp tuyến của nửa đường tròn*

d) *Giả sử CD cắt Bx tại G, phân giác của góc CGE cắt AE, AF lần lượt tại M, N. Chứng minh* ΔAMN *cân*

Giải

Câu 1:

a) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$

* Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Phương trình trở thành: $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy khi $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = -2$

* Với $m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -1$; $\Delta' = (m + 2)^2 - (m + 1)(m - 3) = 6m + 7$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 6m + 7 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{7}{6}$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \ne -1,\ m \ge -\frac{7}{6}$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge -\frac{7}{6}$ và $m \ne -1$

b) Điều kiện: $m \ge -\frac{7}{6}$, $m \ne -1$

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+2)}{m+1} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{m-3}{m+1} \end{cases}$

Do đó $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18 \Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) - 17 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{16(m-3)}{m+1} + \dfrac{8(m+2)}{m+1} - 17 = 0 \Leftrightarrow 16(m-3) + 8(m+2) - 17(m+1) = 0$

$\Leftrightarrow 7m - 49 \Leftrightarrow m = 7$ (thỏa điều kiện $m \ne -1, m \ge -\frac{7}{6}$)

Vậy $m = 7$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

Câu 2:

a) Điều kiện: $x > 0$ và $x \ne 1$

Ta có: $P = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x} - 1 + 2(\sqrt{x}+1) = x - \sqrt{x} + 1$

b) $P = x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \ge \dfrac{3}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$ đạt được khi $x = \frac{1}{4}$

Câu 3:

a) Phương trình đường thẳng (d) : $y = kx - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 + kx - 1 = 0(*)$

Vì (*) có $\Delta = k^2 + 4 > 0 \ \forall k$, nên (d) luôn luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

b) Ta có $x_1x_2 = -1$, từ đó ta có $|x_1 - x_2| = \left|x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right|$

Nhận xét rằng x_1 và $\dfrac{1}{x_1}$ cùng dấu nên: $\left|x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right| = |x_1| + \dfrac{1}{|x_1|} \ge 2$

Vậy $|x_1 - x_2| \ge 2$ (đpcm)

Câu 4:

a) Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{AFB}; \widehat{ABC} = \widehat{AEB}$

Lưu ý rằng hai góc $\widehat{ABD}$ và $\widehat{AFB}$ có hai cặp cạnh tương ứng vuông góc $BA \perp FB$ và $BD \perp FA$ nên chúng bằng nhau: $\widehat{ABD} = \widehat{AFB}$

Tương tự ta cũng có $\widehat{ACB} = \widehat{AEB}$

b) Tứ giác CDEF nội tiếp

Do tứ giác ABCD nội tiếp nên ta có

$\widehat{ECD} = \widehat{ABD}$ (cùng bù với $\widehat{ACD}$)

Ta có $\widehat{ECD} = \widehat{DFB}$ (câu a)

Vậy $\widehat{ECD} + \widehat{DFE} = \widehat{DFB} + \widehat{DFE} = 180^o$

Điều này chứng tỏ tứ giác CDEF nội tiếp được

c) DI là tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho

Tam giác ABF có OI là đường trung bình do đó OI // AF $\Rightarrow$ OI $\perp$ DB

Bởi vậy B và D đối xứng nhau qua OI và $\Delta OBI = \Delta ODI$

$\Rightarrow \widehat{ODI} = \widehat{OBI} = 90^o$

Điều này chứng tỏ DI là tiếp tuyến của đường tròn

d) Chứng minh tam giác AMN cân

Xét tam giác NEG có: $\widehat{N_1} = \widehat{NEG} + \widehat{EGN}$ ($\widehat{N_1}$ là góc ngoài Δ)

Tương tự với ΔDMG ta có $\widehat{DMN} = \widehat{MDG} + \widehat{MGD}$

Mặt khác $\widehat{MGD} = \widehat{EGN}$ (do NG là phân giác góc $\widehat{CGE}$)

$\widehat{MDG} = \widehat{CDA} = \widehat{CBA} = \widehat{AEB}$ (theo câu a)

Từ đó suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{DMN}$

Vậy ΔAMN cân tại A

ĐỀ 37

Câu 1: *Thu gọn biểu thức* $A = \dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$

Câu 2:

1) Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm

b) Gọi x_1, x_2 *là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để có* $x_1^2 + x_2^2 = 13$

2) Giải các hệ phương trình a) $\begin{cases} xy = -64 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$

Câu 3: *Một chiếc đò đi theo dòng nước từ A đến B dài 180km. Khi đi ngược dòng chậm hơn khi xuôi dòng 3km mỗi ngày và thời gian đi từ A đến B ít hơn đi từ B đến A là 3 ngày. Hỏi thời gian đi từ A đến B ?*

Câu 4: *Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), các đường phân giác trong của các góc B, C lần lượt cắt đường tròn tại E, F. Dây cung EF cắt AC, AB lần lượt tại H, I và EB cắt FC tại K*

a) Chứng minh các tam giác FKB và EAK cân

b) Chứng minh tứ giác FIKB nội tiếp. Từ đó suy ra IK // AC

c) Có nhận xét gì về tứ giác AIKH ?

Giải

Câu 1: $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = \frac{1}{-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = -1$$

Câu 2:

1) $x^2 - 2mx - 6m - 9 = 0$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ S < 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 + 6m + 9 > 0\\ 2m < 0\\ -6m - 9 < 0\end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2} \text{ và } m \neq -3$$

b) Theo định lý Viét ta có $S = x_1 + x_2 = 2m$, $P = x_1x_2 = -6m - 9$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2},\ m = -\dfrac{5}{2}$

2.a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x + y + xy = 11\\ x^2y + xy^2 = 30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + y + xy = 11\\ xy\left(x + y\right) = 30\end{cases}$ (I)

Đặt $u = x + y$, $v = xy$; (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}u + v = 11\\ uv = 30\end{cases}$

Vậy u, v là 2 nghiệm của phương trình $X^2 - 11X + 30 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases}u = 6\\ v = 5\end{cases} \vee \begin{cases}u = 5\\ v = 6\end{cases}$. Ta giải 2 hệ phương trình $\begin{cases}x + y = 6\\ xy = 5\end{cases}$ và $\begin{cases}x + y = 5\\ xy = 6\end{cases}$

Ta được 4 nghiệm (x, y) sau: (1 ; 5); (5 ; 1); (2 ; 3); (3 ; 2)

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$. Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$

$$\begin{cases} xy = -64 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ \frac{y-x}{-64} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = -64 \\ x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+16)y = -64 \\ x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 16y + 64 = 0 \\ x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -8 \end{cases}$$

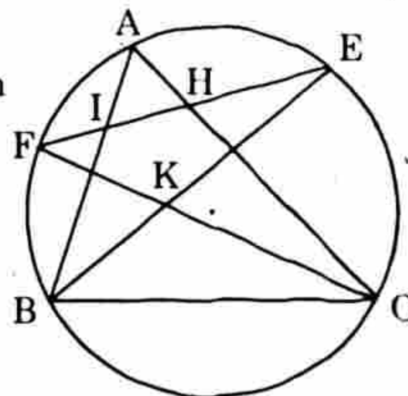
Câu 3:

Gọi x (km/ngày) là vận tốc khi đi xuôi dòng, khi đó ta có (x − 3) (km/ngày) là vận tốc khi đi ngược dòng. Ta có $\frac{180}{x-3} - \frac{180}{x} = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0$

Từ đó ta có x = 15 (loại nghiệm âm) và thời gian đi từ A đến B là 12 ngày

Câu 4:



a) Chứng minh các tam giác FKB và EAK cân

Xét ΔFKB, ta có:

$$\widehat{FKB} = \frac{1}{2}\left(sđ\widehat{FB} + sđ\widehat{EC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(sđ\widehat{AF} + sđ\widehat{AE}\right) = \frac{1}{2}sđ\widehat{FE} = \widehat{FBK}$$

Vậy ΔFKB cân tại F

Chứng minh tương tự ta có ΔEKC cân tại E $\Rightarrow$ EC = EK

Mặt khác: AE = EC $\Rightarrow$ AE = EK $\Rightarrow$ EAK cân tại E

b) Tứ giác FIKB nội tiếp $\Rightarrow$ IK // AC

Ta có $\left.\begin{array}{l} \widehat{IFK} = \frac{1}{2}sđ\widehat{EC} \\ \widehat{IBK} = \frac{1}{2}sđ\widehat{AE} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{IFK} = \widehat{IBK}$

Vậy FIKB có 2 góc chéo bằng nhau $\Rightarrow$ FIKB nội tiếp

Từ đó suy ra $\widehat{IKF} = \widehat{IBF}$ (cùng chắn cung IF)

Mặt khác $\widehat{ACF} = \widehat{ABF}$ (cùng chắn cung AF). Do đó $\widehat{IKF} = \widehat{ACF}$

Hai góc này ở vị trí đồng vị nên IK song song với AC

c) Nhận xét tứ giác AIKH. Chứng minh tương tự ta có HK // AB. Bởi vậy tứ giác AHKI là hình bình hành

ĐỀ 38

Câu 1:

a) Tính $A = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

b) Giải phương trình $\sqrt{x + 1} = x - 1$

Câu 2: *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + y = -m \end{cases}$

a) Chứng tỏ lúc $m = 1$ là hệ phương trình có vô số nghiệm

b) Giải hệ phương trình khi $m \neq 1$

Câu 3: *Trong mặt phẳng Oxy cho (P): $y = ax^2$ và (D) là đường thẳng có phương trình $y = -x + m$*

a) Tìm a biết (P) qua A(2; −1) và vẽ (P) với a vừa tìm được

b) Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P) ở câu 1, và tìm tọa độ tiếp điểm

c) Gọi B là giao điểm của (D) (câu 2) với trục tung, C là điểm đối xứng của A(2, −1) qua trục tung. Chứng minh C ∈ (P) và ΔABC vuông cân

Câu 4: *Cho hai điểm A, B thuộc đường tròn (O) (AB không đi qua O) và có 2 điểm C, D di động trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ sao cho AD song song với BC. (C, D khác A và B và AD > BC). Gọi M là giao điểm của BD và AC. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại điểm I*

a) Chứng minh 3 điểm I, O, M thẳng hàng

b) Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD kh. đổi

Giải

Câu 1:

a) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{5}.\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{5}\right) + 2\sqrt{5}.\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2} = \left|\sqrt{5} - \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{5} + \sqrt{3}\right| = -2\sqrt{3}$$

b) $\sqrt{x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 = (x - 1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Vậy phương trình có nghiệm x = 3

Câu 2:

a) m = 1 hệ phương trình trở thành

$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ox = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x - 1 \end{cases}$

Hệ trên có vô số nghiệm (nghiệm có tọa độ nằm trên đường thẳng y = x − 1

b) Khi m ≠ 1

$\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - x = 1 - m \\ -x + y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(m - 1) = 1 - m \\ y = -m + x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -m - 1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình khi m ≠ 1

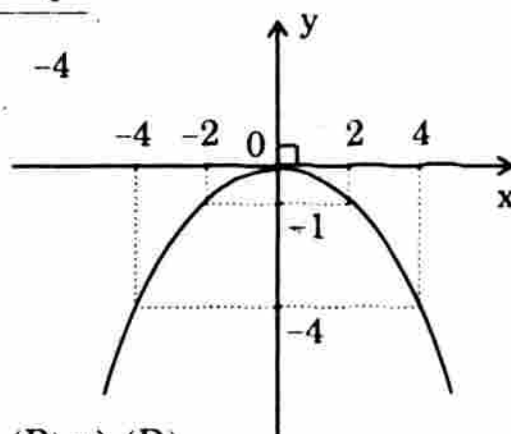
Câu 3:

a) Điểm A(2, −1) ∈ (P) $\Leftrightarrow -1 = a.2^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

(P) $y = -\frac{1}{4}x^2$

- Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$
- Bảng giá trị

x	−4	−2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	−4	−1	0	−1	−4



Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ là một Parabol có đỉnh O(0, 0) nằm dưới trục hoành, nhận Oy làm trục đối xứng

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D)

$-\frac{x^2}{4} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4m = 0 \quad (*)$

Δ' = 4 − 4m, (D) tiếp xúc với (P) ⇔ phương trình (*) có nghiệm kép

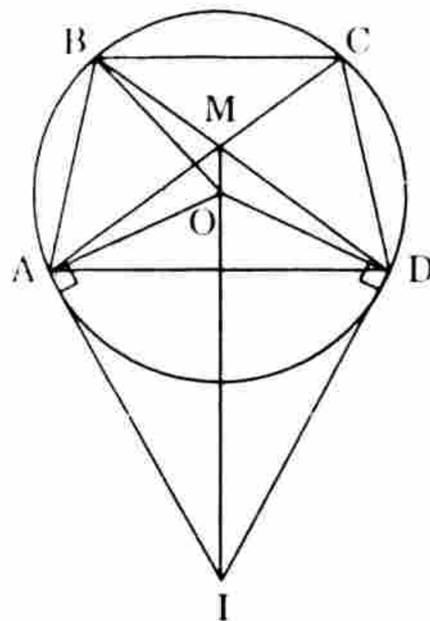
⇔ Δ' = 4 − 4m = 0 ⇔ m = 1

Nghiệm kép của phương trình (*) là x = 2 ⇒ tiếp điểm A(2, −1)

c) C đối xứng với A(2; -1) qua trục tung nên C(-2; -1)

Ta có $-1 = -\frac{1}{4}(-2)^2$ đúng. Vậy tọa độ C(-2; -1) thỏa phương trình Parabol (P). Vậy $C \in (P)$

Câu 4:



a) Tứ giác ABCD là hình thang cân nên có MA = MD. Mặt khác OA = OD và IA = ID suy ra I, M, O nằm trên đường trung trực của đoạn AD

Hay I, M, O thẳng hàng

b) Ta có $\widehat{CMD} = 2\widehat{CAD}$ (do ΔMAD cân tại M)

Mà $\widehat{COD} = 2\widehat{CAD}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn 1 cung)

Suy ra 4 điểm C, M, O, D cùng nằm trên 1 đường tròn

Nghĩa là đường tròn ngoại tiếp ΔMOD cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔCOD (1)

Mặt khác vì $\Delta COD = \Delta BOA$ nên đường tròn ngoại tiếp ΔCOD có bán kính bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBOA (2)

Từ (1) và (2) suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMCD bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBAO.

ĐỀ 39

Câu 1 *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{7} + \dfrac{2x+y}{17} = 7 \\ \dfrac{4x+y}{5} + \dfrac{y-7}{19} = 15 \end{cases}$$

Câu 2 *Cho hàm số* $y = -\frac{1}{2}x^2$

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên

b) Viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm M và N nằm trên (P) lần lượt có hoành độ là -2; 1

Câu 3 *Một miếng vườn hình chữ nhật có diện tích $1200m^2$. Tính các kích thước của miếng vườn đó, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 5m và giảm chiều rộng đi 10m thì diện tích của miếng vườn giảm đi $300m^2$*

Câu 4: *Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kỳ trên cạnh Oy. Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E. Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là F*

a) Chứng minh 4 điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó

b) Tứ giác OCFM là hình gì? Tại sao?

c) Chứng minh hệ thức OE.OF + BE.BM = OB^2.

d) Xác định vị trí của điểm M để tứ giác OCFM là hình bình hành. Tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi

Giải

Câu 1:

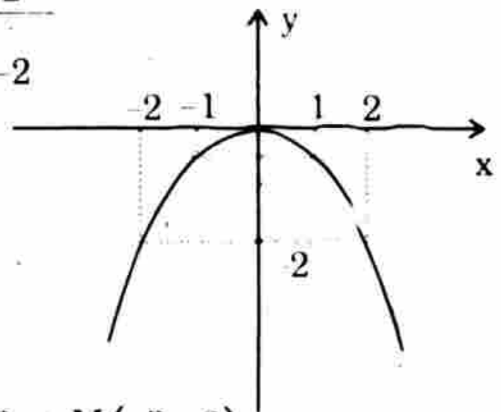
$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{7} + \dfrac{2x+y}{17} = 7 \\ \dfrac{4x+y}{5} + \dfrac{y-7}{19} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 31x - 10y = 833 \\ 76x + 24y = 1460 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 31x - 10y = 833 \\ 19x + 6y = 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 93x - 30y = 2499 \\ 95x + 30y = 1825 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = -12 \end{cases}$$

Câu 2:

a) Tập xác định : D = $\mathbb{R}$. Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \dfrac{-x^2}{2}$	-2	$-\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	-2



Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ là một Parabol có đỉnh O(0, 0) là điểm cực đại, nằm phía dưới trục hoành có trục tung là trục đối xứng

Vì $M \in P \Rightarrow y_M = -\dfrac{1}{2}x_M^2 = -\dfrac{1}{2}(-2)^2 = -2 \Rightarrow M(-2, -2)$

Vì $N \in P \Rightarrow y_N = -\dfrac{1}{2}x_N^2 = -\dfrac{1}{2}(+1)^2 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow N\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$

Đường thẳng MN không song song với Oy nên phương trình có dạng y = ax + b

$$\left.\begin{array}{l} M \in MN \Leftrightarrow -2 = -2a + b \\ N \in MN \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} = a + b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng MN là $y = \frac{1}{2}x - 1$

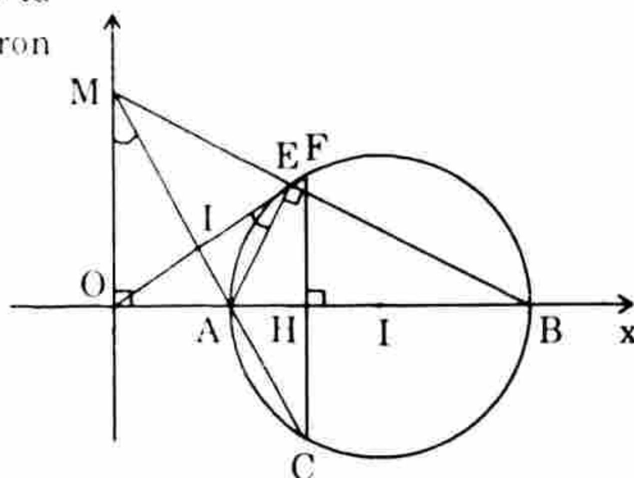
Câu 3: Gọi x (m) là chiều dài mảnh vườn, thì $\frac{1200}{x}$ (m) là chiều rộng mảnh vườn

Theo giả thiết ta có: $(x+5)\left(\frac{1200}{x} - 10\right) = 1200 - 300$

$\Leftrightarrow x^2 - 25x - 600 = 0 \Leftrightarrow x = 40,\ x = -15$ (loại)

Vậy chiều dài miếng vườn là 40m, chiều rộng 30m

Câu 4:



a) Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{AEM} = 90^\circ$. Nên tứ giác OAEM nội tiếp đường tròn đường kính MA

b) Tứ giác OAEM nội tiếp

Suy ra $\widehat{OMA} = \widehat{OEM}$

Bốn điểm A, E, F, C cùng nằm trên đường tròn (T) nên $\widehat{OEA} = \widehat{ACF}$

Do đó $\widehat{OMA} = \widehat{ACF} \Rightarrow FC // OM$.

Vậy OCFM là hình thang

c) $\Delta OFA \sim \Delta OBE \Rightarrow \frac{OF}{OB} = \frac{OA}{OE} \Rightarrow OE.OF = OA.OB$ (1)

$\Delta OBM \sim \Delta EBA \Rightarrow \frac{OB}{EB} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow BE.BM = BA.BO$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $OE.OF + BE.BM = OB^2$.

d) Gọi giao điểm của CM với OF là I và CF với OB là H

Hình thang OCFM là hình bình hành $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của OF $\Leftrightarrow$ A là trọng tâm $\Delta COF \Leftrightarrow OA = 2AH$. Từ đó ta có cách dựng sau:

- Dựng điểm H trên tia OA thỏa OA = 2AH
- Qua H dựng đường thẳng vuông góc với OB cắt (T) tại F và (C)
- Nối AC cắt Oy tại M thì M là điểm cần dựng

Khi OCFM là hình bình hành, muốn nó là hình thoi thì $CI \perp OF$. Suy ra ΔOCF đều, A là tâm của tam giác đều OCF nên $\widehat{CAT} = 60^\circ$

$\Rightarrow OA = AC = AT = \frac{AB}{2}$

ĐỀ 40

Câu 1: *Cho* $A = \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa *b) Rút gọn A*

Câu 2: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 1

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m

Câu 3:

1) Trong cùng 1 hệ trục vuông góc Oxy, cho (P) : $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ *và đường thẳng (D) :* $y = mx - 2m - 1$

a) Vẽ (P)

b) Tìm m sao cho (D) tiếp xúc với (P)

c) Chứng tỏ (D) luôn luôn đi qua điểm cố định $A \in (P)$

Câu 4: *Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC) có đường cao AH và trung tuyến AM. Vẽ đường tròn tâm H bán kính AH. Cắt AB ở đỉnh D, cắt AC ở điểm E (D và E khác A)*

a) Chứng minh D, H, E thẳng hàng

b) Chứng minh $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$ *và MA vuông góc với DE*

c) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn tâm O Tứ giác AMOH là hình gì ?

d) Cho góc $\widehat{ACB} = 30^o$ *và AH = a. Tính diện tích ΔHEC*

Giải

Câu 1:

a) A có nghĩa: $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - \sqrt{x} \ne 0 \\ \sqrt{x} + 1 \ne 0 \\ x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}\right)^3 - 1\right] \ne 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(\sqrt{x}\right)^3 - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(\sqrt{x}\right)^3 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$

b) $A = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}\right)^3 - 1\right]} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+x+1\right)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{x-1}$$

Câu 2:

a) m = 1, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} -2x + y = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 3y = 15 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 14 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6mx + 3y = 15 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7mx = 14 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -2 \\ y = \frac{1 - mx}{3} \end{cases}$ (*)

- m = 0 thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0x = -2 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ (VN); • m ≠ 0 thì (*) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \frac{-2}{m} \\ y = 1 \end{cases}$ là

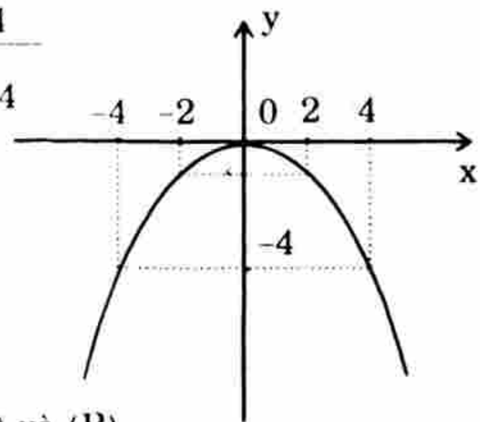
nghiệm

Câu 3:

Tập xác định D = ℝ

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4



Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ là đường cong parabol có O(0, 0) là đỉnh cực đại, nằm dưới trục hoành, nhận Oy làm trục đối xứng

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P)

$-\frac{x^2}{4} = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0$ (*)

Có $\Delta' = 4m^2 + 8m + 4 = 4(m+1)^2$. (D) tiếp xúc với P ⇔ phương trình (*) có nghiệm kép ⇔ $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -1$

c) Gọi $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định thuộc (D)

$\Leftrightarrow y_0 = mx_0 - 2m - 1$ đúng $\forall m$

$\Leftrightarrow m(x_0 - 2) - 1 - y_0 = 0$ đúng $\forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ -1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(2, -1)$

Giả sử $A \in (P) \Leftrightarrow -1 = \dfrac{-(2)^2}{4} \Leftrightarrow -1 = -1$ đúng

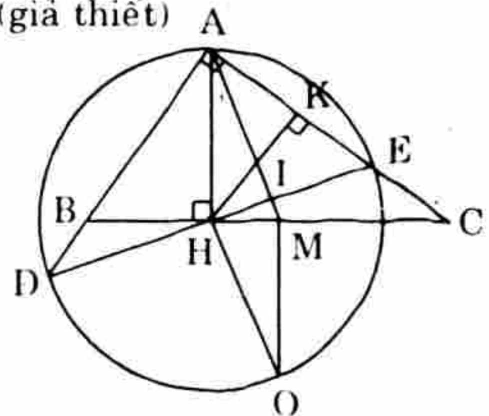
Vậy $A \in (P)$. Do đó (D) luôn luôn đi qua điểm cố định $A(2, -1) \in (P)$

Câu 4:

a) Ta có $\widehat{DAE} = 90^0 \Rightarrow$ DE là đường kính của đường tròn (H, AH)

$\Rightarrow$ D, E, H thẳng hàng

b) ΔABC vuông tại A có AM là trung tuyến (giả thiết)



$\Rightarrow AM = MB = MC = \dfrac{BC}{2}$

ΔMAC cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MCA}$ (1)

HA = HD (vì A, D $\in$ đường tròn (H, AH))

ΔHAD cân tại H $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{BAH}$ (2)

Mà $\widehat{MCA} = \widehat{BAH}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc) (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{MAE} = \widehat{ADE}$

Gọi I là giao điểm của AM và DE

Ta có : $\widehat{MAE} + \widehat{DAI} = \widehat{DAE}$

Do đó $\widehat{ADE} + \widehat{DAI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AID} = 90^0 \Rightarrow MA \perp DE$

c) Từ (2) và (3) ta có $\widehat{ADE} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow$ B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn tâm O

M là trung điểm dây BC nên $OM \perp BC$

H là trung điểm dây DE nên $OH \perp DE$

Ta có $AH \perp BC$ (giả thiết) và $OM \perp BC \Rightarrow AH // OM$

$MA \perp DE$ (câu b) và $OH \perp DE \Rightarrow MA // OH$

Tứ giác AMOH có AH // OM, MA // OH nên tứ giác AMOH là hình bình hành

d) Vẽ HK vuông góc với AC. ΔHAC vuông tại H có $\widehat{ACH} = 30^0$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta HAC$ là nửa tam giác đều $\Rightarrow \widehat{HAE} = 60^0$, $AC = 2AH = 2a$

ΔHAE cân tại H (HA = HE) có $\widehat{HAE} = 60^0 \Rightarrow \Delta HAE$ đều

$\Rightarrow AE = HE = a$, $HK = \dfrac{AH\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $EC = AC - AE = 2a - a = a$

Vậy $S_{\Delta HEC} = \dfrac{1}{2}EC.HK = \dfrac{1}{2}a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (đvdt)

ĐỀ 41

Câu 1:

a) Rút gọn các biểu thức: $P = \dfrac{4a^2 - 4}{ac - c + a - 1}$; $Q = \dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

b) Giải phương trình: $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng: $d_1 : y = 2x - 7$ và

$d_2 : y = -x - 1$

a) Vẽ hai đường thẳng d_1 và d_2 trên cùng một hệ trục Oxy

b) Bằng đồ thị, xác định tọa độ giao điểm của d_1, d_2. Rồi kiểm tra bằng phép tính

Câu 3: Hai chiếc máy cày cùng làm chung thì trong 4 giờ cày xong một thửa ruộng. Nếu để mỗi chiếc máy cày cày riêng thì máy cày này xong trước máy cày kia là 6 giờ. Hỏi nếu cày riêng, mỗi máy cày phải mất bao lâu mới cày xong đám ruộng

Câu 4: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, gọi K là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$, M là điểm di động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AK}$ ($M \neq A; K$) lấy điểm N trên đoạn BM sao cho BN = AM

a) Chứng minh $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

b) Chứng minh tam giác MNK vuông cân

c) Hai đường thẳng AM và OK cắt nhau tại D. Chứng minh MK là đường phân giác của góc $\widehat{DMN}$

d) Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với BM tại N luôn luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Câu 1:

a) Ta có • $P = \dfrac{4a^2 - 4}{ac - c + a - 1} = \dfrac{4(a-1)(a+1)}{(a-1)c + (a-1)}$

$$P = \frac{4(a-1)(a+1)}{(a-1)(c+1)} = \frac{4(a+1)}{c+1} \quad \text{(điều kiện } a \neq 1\text{)}$$

• $Q = \dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

b) Giải phương trình $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ (1)

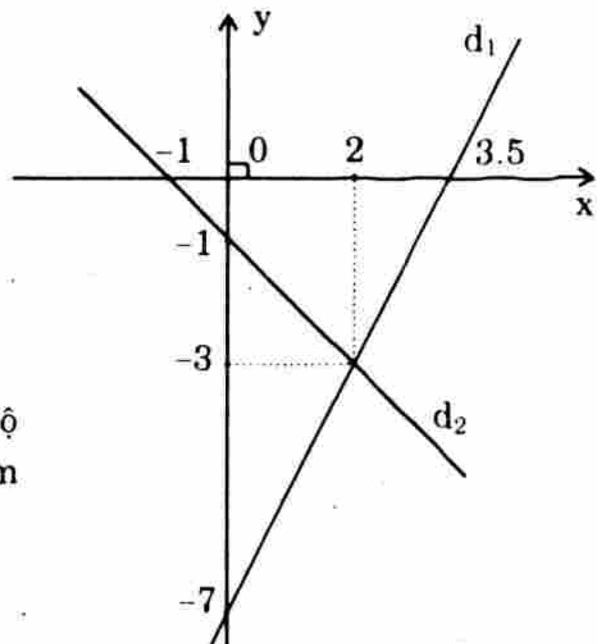
Đặt $u = x^2 \geq 0$ thì (1) trở thành $u^2 - 6u + 8 = 0$ có $\Delta' = 9 - 8 = 1$

$(1) \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{3-1}{1} = 2,\ u_2 = \dfrac{3+1}{1} = 4$

- $u = x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$;
- $u = x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Câu 2:

$d_1 : y = 2x - 7,\quad d_2 : y = -x - 1$



$d_1 : \begin{cases} \text{cho } x = 0 \Rightarrow y = -7 \\ \text{cho } y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

$d_2 : \begin{cases} \text{cho } x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ \text{cho } y = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

Nhờ đồ thị ta thấy d_1 cắt d_2 tại M(2, – 3)

Kiểm tra bằng phép tính. Tọa độ giao điểm M của d_1, d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = -x - 1 \end{cases} \Rightarrow M(2, -3)$

Câu 3: Gọi x(h) (x > 0) là thời gian máy cày thứ nhất, cày xong thửa ruộng, thì (x + 6)(h) là thời gian máy cày thứ hai, cày xong thửa ruộng

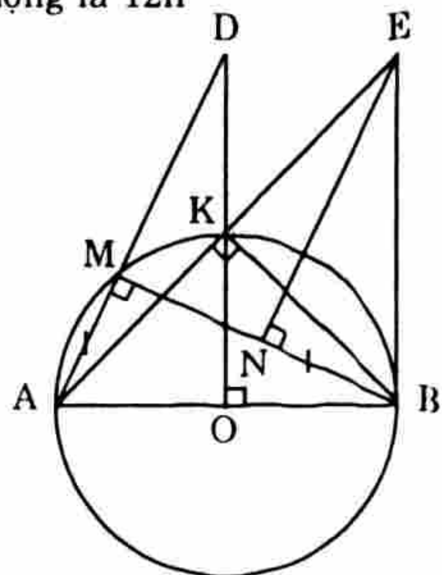
Theo giả thiết ta có: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$ (điều kiện $x > 0$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -4 & \text{(loại)} \\ x = 6 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$

Vậy : máy cày thứ nhất cày xong thửa ruộng là 6h

máy cày thứ hai cày xong thửa ruộng là 12h

Câu 4:



a) Ta có $\Delta AKM = \Delta BNK$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

b) Từ kết quả câu a) $\Delta AMK = \Delta BNK$

Ta có KM = KN và $\widehat{AKM} = \widehat{BKN}$

Mà $\widehat{BKN} + \widehat{AKN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AKM} + \widehat{AKN} = 90^\circ$

Do đó ΔKMN vuông cân tại K

c) Từ kết quả câu b) tam giác MKN vuông cân tại K nên $\widehat{NMK} = 45^\circ$

Do $\widehat{DMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DMK} = 45^\circ$

Suy ra MK là đường phân giác của DMN

d) Giả sử đường thẳng vuông góc với BM cắt AK tại E

Dễ nhận thấy rằng tứ giác BEKN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{MNK} = 45^0$

Mặt khác $\widehat{BAE} = 45^0$ nên ΔABE vuông cân tại B, dẫn đến E cố định (điều phải chứng minh)

ĐỀ 42

Câu 1: *Cho phương trình* $mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$

a) Định m để phương trình có nghiệm

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm

Câu 2: *Giải các phương trình*

a) $|2x^2 - 5x + 1| = |3x - 1|$

b) $-x^2 + 2 = \sqrt{2 - x}$ *c)* $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$

Câu 3: *Một canô chạy xuôi dòng từ A đến B, rồi chạy ngược dòng từ B đến A mất tất cả 4 giờ. Tính vận tốc của canô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30km và vận tốc của dòng nước là 4km/h*

Câu 4: *Cho đường tròn tâm (O) có dây cung AB. Trên tia AB lấy 1 điểm C nằm ngoài đường tròn. Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính PQ, cắt dây AB tại D. Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I, các dây AB và QI cắt nhau tại K*

a) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp được

b) Chứng minh CI.CP = CK.CD

c) Chứng minh IC là tia phân giác của góc ngoài đỉnh I của ΔAIB

d) Cố định A, B, C. Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua A, B thì đường thẳng QI luôn luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Câu 1:

a) m = 0, phương trình trở thành $-4x = 0 \Rightarrow x = 0$

$m \neq 0$ ta có $\Delta' = (m+2)^2 - m^2 = 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Vậy khi $m \geq -1$ thì phương trình cho có nghiệm

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt đều âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \quad (m \neq 0) \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \quad (m \neq 0) \\ 1 > 0 \\ \dfrac{2(m+2)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Câu 2:

a) $\left|2x^2 - 5x + 1\right| = |3x - 1| \Leftrightarrow \left(2x^2 - 5x + 1\right)^2 - (3x - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2 - 2x\right)\left(2x^2 - 8x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = 0$, $x = 1$, $x = 2 + \sqrt{3}$, $x = 2 - \sqrt{3}$

b) $-x^2 + 2 = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 \geq 0 \\ \left(-x^2 + 2\right)^2 = 2 - x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2 \geq 0 \\ (x - 1)(x + 2)\left(x^2 - x - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $x = 1$, $x = -2$, $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

c) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 24$

$\Leftrightarrow [(x + 1)(x + 4)]\,[(x + 2)(x + 3)] = 24$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$ thì (1) $\Leftrightarrow t(t + 2) = 24 \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = -6$

- $t_1 = 4$ ta có $x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow x = 0, x = -5$
- $t = -6$ ta có $x^2 + 5x + 4 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10$ (VN)

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x = 0$, $x = -5$

Câu 3: Gọi x km/h là vận tốc của canô khi dòng nước yên lặng $(x > 4)$ thì vận tốc của canô lúc xuôi dòng là $(x + 4)$ km/h, và vận tốc canô lúc ngược dòng là $(x - 4)$ km/h

Quãng sông AB dài 30km. Do đó thời gian canô đi xuôi dòng là $\dfrac{30}{x+4}$ h và thời gian ngược dòng là $\dfrac{30}{x-4}$ h

Theo giả thiết ta có $\frac{30}{x+4} + \frac{30}{x-4} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 15x - 16 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 16$,

$x_2 = -1$ (loại). Vậy vận tốc canô khi nước yên lặng là 16km/h

Câu 4:

a) Tứ giác PDKI nội tiếp

Ta có $PQ \perp AB \Rightarrow \widehat{PDK} = 90^0$

$\widehat{PIK} = \widehat{PIQ} = 90^0$ (chắn nửa đường tròn

Vậy tứ giác PDKI nội tiếp trên đường tròn đường kính PK

b) Tích CI.CP = CK.CD

Hai tam giác vuông CIK và CPD đồng dạng. Từ đó suy ra :

$\frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP} \Rightarrow CI.CP = CD.CK$

c) IC là tia phân giác góc ngoài đỉnh I của ΔAIB

Ta có $\overset{\frown}{QA} = \overset{\frown}{QB}$, do đó $\widehat{AIQ} = \widehat{BIQ}$ hay IQ là phân giác trong của góc I của ΔAIB và $IC \perp IQ \Rightarrow$ IC là phân giác ngoài đỉnh I của ΔAIB

d) QI đi qua điểm cố định:

Theo câu b) ta có CI.CP = CK.CD (1)

Đồng thời ta thấy 2 tam giác CIB và CAP đồng dạng (vì có $\widehat{IBC} = \widehat{APC}$ do cùng bù góc ABI) từ đó suy ra:

$\frac{CI}{CB} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow CI.CP = CA.CB$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $CK.CD = CA.CB \Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{CD}$

Biểu thức này chứng tỏ CK có độ dài không đổi và do đó K là điểm cố định

ĐỀ 43

Câu 1: *Rút gọn biểu thức* $A = \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} + 1$. *Tìm các giá trị nguyên của a để biểu thức A nhận giá trị nguyên*

Câu 2: *Giải các phương trình:*

a) $x + \frac{1}{x} = -2$ b) $\sqrt{x-5} = x - 7$

Câu 3: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases}$

a) *Giải hệ phương trình với* $m = 2$

b) *Xác định giá trị của m để hai đường thẳng có phương trình (1), (2) cắt nhau tại một điểm trên parabol* $y = -2x^2$.

Câu 4: *Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (M khác A, B). Dựng đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC, BD đến đường tròn tâm M*

a) *Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn O*

b) *Chứng minh tổng AC + BD không đổi. Từ đó tính giá trị lớn nhất của AC.BD*

c) *Lấy điểm N cố định trên đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của MN, P là hình chiếu của I trên MB. Tìm quỹ tích của điểm P.*

Giải

Câu 1:

a) Rút gọn $A = \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}+1} + 1$

$$A = \frac{\sqrt{a}+1-\sqrt{a}+1}{a-1} + 1 = \frac{2}{a-1} + 1 = \frac{2+a-1}{a-1} = \frac{a+1}{a-1}$$

b) Ta có $A = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$, A nhận giá trị nguyên khi $\frac{2}{a-1}$ nguyên,

$\frac{2}{a-1}$ nguyên khi $(a-1)$ là ước của 2

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} a-1=-1 & \Rightarrow a=0 & \Rightarrow A=-1 \\ a-1=1 & \Rightarrow a=2 & \Rightarrow A=3 \\ a-1=-2 & \Rightarrow a=-1 & \Rightarrow A=0 \\ a-1=2 & \Rightarrow a=3 & \Rightarrow A=2 \end{array}\right.$$

Câu 2:

a) Giải phương trình $x + \frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$, điều kiện $(x \neq 0)$

có $\Delta' = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$

b) Giải phương trình $\sqrt{x - 5} = x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ x - 5 = (x - 7)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x = 6, x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$

Câu 3:

a) Giải hệ phương trình với $m = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) trừ (1) vế theo vế ta có $\begin{cases} x + y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

b) Trước tiên ta tìm giao điểm của 2 đường thẳng

Tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng là nghiệm của hệ phương trình:

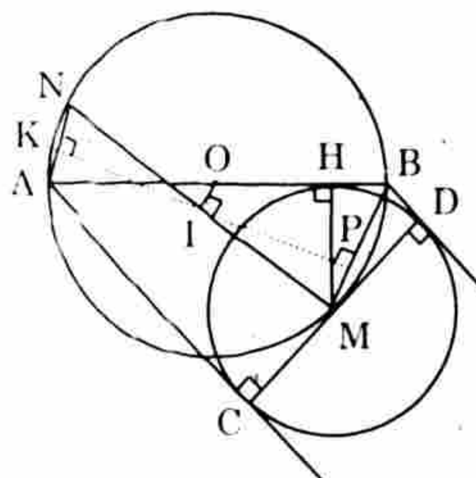
$\begin{cases} x + y = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ (m - 1)x = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - m}{m - 1} = -1 \quad (m \neq 1) \\ y = m + 1 \end{cases}$

Vì giao điểm nằm trên parabol $y = -2x^2 \Rightarrow m + 1 = -2(-1)^2$

$\Leftrightarrow m + 1 = -2 \Leftrightarrow m = -3$

Vậy khi $m = -3$ thì 2 đường thẳng có phương trình là (1), (2) cắt nhau tại 1 điểm trên parabol $y = -2x^2$

Câu 4:



a) CD là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Theo tính chất hai tiếp tuyến xuất phát từ 1 điểm ta có

$\widehat{CMA} = \widehat{HMA}$ và $\widehat{DMB} = \widehat{HMB}$

Từ đó: $\widehat{CMA} + \widehat{DMB} = \widehat{HMA} + \widehat{HMB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CMA} + \widehat{DMB} + \widehat{AMB} = 180^\circ$

Điều này chứng tỏ D, M, C thẳng hàng

Khi đó AC // BD (cùng vuông góc với CD)

Trong hình thang ABDC thì OM là đường trung bình nên OM // AC

$\Rightarrow OM \perp CD$

Vậy CD tiếp xúc với đường tròn (O) tại M

b) Tổng AC + BD không đổi. Tính giá trị lớn nhất của AC.BD

Ta có AC = AH, BD = BH $\Rightarrow$ AC + BD = AB không đổi

Ta có $4AC.BD = (AC + BD)^2 - (AC - BD)^2$

Bởi vậy tính AC.BD lớn nhất khi và chỉ khi $(AC - BD)^2$ nhỏ nhất, tức là khi AC = BD = OM. Khi đó M là điểm chính giữa cung AB

c) Kéo dài PI cắt AN tại k, thế thì: PK//AC (cùng vuông góc với MB)

Do I là trung điểm của MN nên K là trung điểm của AN. Bởi vậy K cố định. Từ đó suy ra P chạy trên đường tròn đường kính AB.

ĐỀ 44

Câu 1:

a) Giải phương trình $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x+9} + \sqrt{x^2-2x+26} = -x^2+2x+8$

Câu 2: *Cho* $P = \left(\dfrac{b-a}{\sqrt{b}-a} - \dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right) : \dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2 + \sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

a) Rút gọn P   *b) Chứng tỏ rằng* $P \geq 0$

Câu 3: *Trong tháng đầu, hai tổ sản xuất được 500 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai, tổ I vượt mức 10%. Tổ II vượt mức 15%, do đó cuối tháng, cả hai tổ đã sản xuất được 560 chi tiết máy. Tính xem trong tháng đầu, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy*

Câu 4: *Cho hình thang cân ABCD (BC//AD). Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O sao cho* $\widehat{BOC} = 60^o$. *Gọi I, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, OA, OB, AB, CD*

a) Chứng minh tứ giác DMNC nội tiếp được

b) Chứng minh tam giác MNQ là tam giác đều

c) Gọi H là trực tâm của tam giác MNQ. Chứng minh H,O,I thẳng hàng

Giải

Câu 1:

a) Điều kiện $x^2 \leq 2$ ta có: $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{x^2+8} = 4$

$\Leftrightarrow 2 - x^2 + x^2 + 8 + 2\sqrt{\left(2-x^2\right)\left(x^2+8\right)} = 16$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(2-x^2\right)\left(x^2+8\right)} = 3 \Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 7 = 0$ (1)

Đặt $u = x^2 \geq 0$ thì (1) trở thành $u^2 + 6u - 7 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1, u_2 = -7$(loại)

Vậy $x^2 = 1 \Leftrightarrow x \pm 1$

b) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x + 19} + \sqrt{x^2 - 2x + 26} = -x^2 + 2x + 8$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x + 19} + \sqrt{x^2 - 2x + 26} + x^2 - 2x + 1 = 9$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(x-1)^2 + (x-1)^2 + 16} + \sqrt{(x-1)^2 + 25} + (x-1)^2 = 9$

VT $\geq 4 + 5 + 0 = 9$, VP $= 9$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình (1) có 1 nghiệm $x = 1$

Câu 2:

a) Điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a \neq b \end{cases}$

$$P = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a + b - \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a + b - \sqrt{ab}}$$

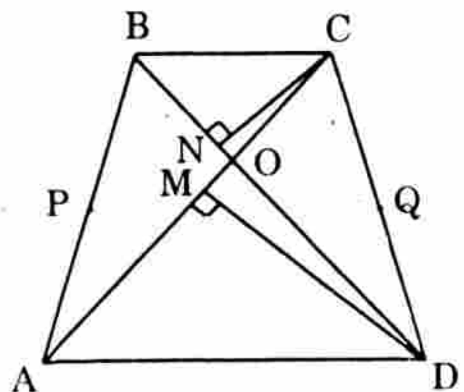
b) Chứng tỏ $P \geq 0$

Ta có $P = \dfrac{\sqrt{ab}}{a + b - \sqrt{ab}} \geq 0$ vì $a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a + b - \sqrt{ab} \geq 0$

Câu 3: Giả sử trong tháng đầu tổ I làm được x chi tiết máy ($x > 0$, $x \in \mathbb{N}$) và tháng đầu tổ II làm được y chi tiết ($y > 0$, $y \in \mathbb{N}$)

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 500 \\ \dfrac{10}{100}x + \dfrac{15}{100}y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 200 \end{cases}$

Câu 4:



a) Tứ giác DMNC nội tiếp được

Do ABCD là hình thang cân nên các tam giác OAD, OBC cân tại O.

Hơn nữa $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 60^\circ$

Nên hai tam giác này là đều.

Bởi vậy các đường trung tuyến DM, CN cũng là đường cao, nghĩa là $\widehat{CMD} = \widehat{CND} = 90^\circ$. Điều này chứng tỏ M, N nằm trên đường tròn đường kính CD

b) Tam giác MNQ đều

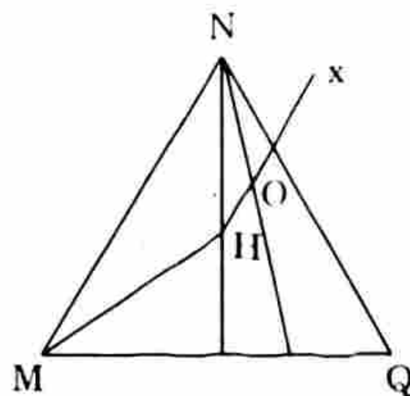
Theo câu a) ta có: $MQ = NQ \left(= \dfrac{1}{2}CD\right)$

Hơn nữa, MN là đường trung bình của ΔOAB nên $MN = \dfrac{AB}{2}$

Do AB = CD nên MQ = NQ = MN

Suy ra ΔMNQ đều

c) Chứng minh H, O, I thẳng hàng



Ta chứng minh đường thẳng OH đi qua điểm I

Trước hết, do tam giác MNQ đều nên $\widehat{MHN} = 120^o = \widehat{MON}$

Hai điểm H, O cùng nhìn MN dưới góc 120^o nên tứ giác MNOH nội tiếp được. Khi đó gọi Ox là tia đối của OH ta có:

$\widehat{NOx} = \widehat{NMH}$ (hai góc cùng bù với $\widehat{NOH}$)

Do $\widehat{NMH} = 30^o$ nên $\widehat{NOx} = 30^o$

Điều này chứng tỏ Ox là đường phân giác của góc BOC và do đó Ox đi qua trung điểm I của BC. Vậy H, O, I thẳng hàng.

ĐỀ 45

<u>Câu 1:</u> *Cho Parabol (P) : $y = x^2 - 4x + 3$*

a) Chứng minh đường thẳng $y = 2x - 6$ tiếp xúc với parabol (P)

b) Giải bằng đồ thị bất phương trình $x^2 - 4x + 3 > 2x - 4$

<u>Câu 2:</u> *Cho phương trình $(2 - m)x^2 - (1 - 2m)x - m - 1 = 0$ (1)*

a) Chứng minh phương trình (1) có nghiệm với mọi m

b) Tìm các giá trị m để phương trình (1) có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 2$

<u>Câu 3:</u> *Hai xe lửa khởi hành ngược chiều nhau từ A và B cách nhau 650km để gặp nhau. Nếu chúng khởi hành cùng 1lúc thì sẽ gặp nhau sau 10giờ, nhưng nếu xe thứ hai khởi hành sớm hơn xe thứ nhất là 4giờ 20phút thì chúng sẽ gặp nhau sau 8giờ. Tính từ lúc xe thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc mỗi xe*

<u>Câu 4:</u> *Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R và một điểm C trên đường tròn (C không trùng với A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C kẻ tia Ox tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC, P là giao điểm của AC và BM. Tia BC cắt các tia AM, Ax lần lượt tại N, Q*

a) Chứng minh tam giác ANB cân

b) Tứ giác APNQ là hình gì? Tại sao?

c) Gọi C' là điểm chính giữa của cung AB không chứa C. Hỏi có thể xảy ra 3 điểm Q, M, K thẳng hàng được không? Tại sao?

d) Xác định vị trí của điểm C để đường tròn ngoại tiếp tam giác MNQ tiếp xúc với đường tròn (O)

Giải

Câu 1:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và (P):

$x^2 - 4x + 3 = 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$ (1)

Có $\Delta' = 9 - 9 = 0$ nên phương trình (1) có nghiệm kép do đó đường thẳng $y = 2x - 6$ tiếp xúc với parabol (P)

b) $x^2 - 4x + 3 > 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 > 6x + 7$

Trên cùng 1 hệ trục Oxy vẽ (P) : $y = x^2$, (d) : $y = 6x + 7$

d cắt (P) tại 2 điểm A(–1, 1) và B(7, 49)

Từ đó, ta thấy các điểm trên trục x'Ox và tung độ tương ứng trên (P_1) lớn hơn tung độ tương ứng trên (d) là $x < -1$ hoặc $x > 7$. Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -1 \vee x > 7$

Câu 2:

a) $(2 - m)x^2 - (1 - 2m)x - m - 1 = 0$ (1)

- Nếu m = 2, phương trình (1) có dạng $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Nếu $m \neq 2$, phương trình (1) là phương trình bậc hai có $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{m+1}{m-2}$

Vậy phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi m

b) Xét hai trường hợp

- $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{2(m+1)}{m-2} \Leftrightarrow m - 2 = 2m + 2 \Leftrightarrow m = -4$
- $x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{m-2} = 2 \Leftrightarrow m + 1 = 2m - 4 \Leftrightarrow m = 5$

Vậy m = –4, m = 5 thỏa mãn đề bài

c) $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{m-2} \neq 1 \Leftrightarrow m + 1 \neq m - 2 \Leftrightarrow 1 \neq -2$ luôn luôn đúng. Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi $m \neq 2$

- $x_1^2 + x_2^2 > 2 \Leftrightarrow 1 + \left(\dfrac{m+1}{m-2}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{m+1}{m-2}\right)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{6m-3}{(m-2)^2} > 0$

Do đó $m \neq 2$ nên $(m-2)^2 > 0$. Vậy $6m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

Đáp số : với $m > \dfrac{1}{2}$ và $m \neq 2$ thì $x_1^2 + x_2^2 > 2$

Câu 3: Gọi x, y lần lượt là vận tốc xe thứ nhất và xe thứ hai ($x, y > 0$, đơn vị km/h)

Xe thứ nhất đi trong 8 giờ, xe thứ hai đi trong $12\frac{1}{3}$ giờ thì hai xe gặp nhau nên: $8x + \frac{37}{3}y = 650$

Mặt khác, sau 10 giờ hai xe gặp nhau nên $10x + 10y = 650$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} 10x + 10y = 650 \\ 8x + \frac{37}{3}y = 650 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 30 \end{cases}$

$x = 35$, $y = 30$ thỏa mãn điều kiện bài toán

Vậy vận tốc xe thứ nhất là $x = 35$ km/h

Vận tốc xe thứ hai là $y = 30$ km/h

Câu 4:

a) Tam giác ABN cân

Do AM = MC nên MB là phân giác của góc ABN

Đồng thời do AB là đường kính nên $\widehat{AMB} = 90^o$

Phân giác MB cũng là đường cao nên tam giác ABN cân tại B

b) Tứ giác APNQ là hình gì?

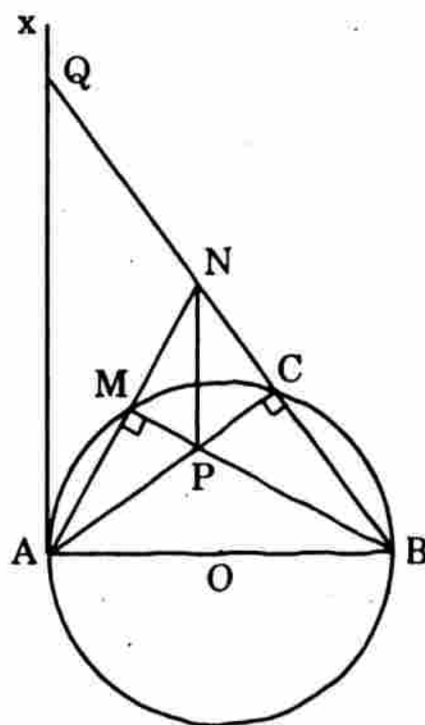
Theo câu a) ta có $AN \perp MB$

Tương tự ta có $AC \perp BN$

Bởi vậy P là trực tâm của ΔABN và do đó NP là đường cao thứ ba

$\Rightarrow NP \perp AB \Rightarrow NP \parallel Ax$

Vậy APNQ là hình thang



c) Ba điểm Q, M, K có thẳng hàng không?

Giả sử 3 điểm Q, M, K thẳng hàng. Khi đó

$\widehat{AQK} = \frac{1}{2}\left(\text{Sđ } \overset{\frown}{AK} - \text{Sđ } \overset{\frown}{AM}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{Sđ } \overset{\frown}{BK} - \text{Sđ } \overset{\frown}{MC}\right) = \widehat{KQB}$

Xét tam giác ABQ có QM và BM là 2 đường phân giác

Vậy AM là phân giác góc QAB, tức là điểm giữa của cung AB. Điều này không xảy ra. Do đó ba điểm Q, M, K không thẳng hàng

ĐỀ 46

Câu 1: *Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức*

$$B = \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right) : \frac{4y^2}{x^2+y^2-2xy}\right]\cdot\frac{x+y}{x-y}$$

Với $x = 2;\ y = 0{,}01$

Câu 2:

1) Giải các phương trình

a) $|x-1| + 3|x-4| = 7$ *với* $1 < x < 4$ *b)* $|x-2| - 3x = 5$

2) Với giá trị nào của x thì

a) $A = 2x^2 - 20x + 81$ *có giá trị nhỏ nhất ?*

b) $B = -5x^2 + \frac{10}{7}x - 1$ *có giá trị lớn nhất ?*

Câu 3: *Một đội thuyền đánh cá, dự định mỗi ngày bắt được 30 tấn cá. Đội đã đánh bắt được 40 tấn cá mỗi ngày, nên đã hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 3 ngày, ngoài ra còn đánh bắt thêm được 20tấn cá nữa. Tính số tấn cá phải đánh bắt theo kế hoạch*

Câu 4: *Cho ΔABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn đường kính AD. Từ điểm M bất kỳ trên cung nhỏ AC kẽ tia BM trên lấy điểm E sao cho ME = MC (E ở ngoài đoạn BM)*

a) Chứng minh MD//EC

b) AM kéo dài cắt CE tại P, chứng minh P là trung điểm của CE

c) Chứng minh đường tròn tâm A, bán kính AE đi qua B và C

d) Chứng minh MB + MC < AB + AC

Giải

Câu 1:

Ta có $B = \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right) : \frac{4y^2}{x^2+y^2-2xy}\right]\cdot\frac{x+y}{x-y}$

$$= \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)}\right) : \frac{4y^2}{(x-y)^2}\right]\frac{x+y}{x-y}$$

$$= \left[\left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x-y)}\right) : \frac{4y^2}{(x-y)^2}\right]\frac{x+y}{x-y} = \left[\frac{2x+2y-2x}{x+y}\cdot\frac{x-y}{4y^2}\right]\cdot\frac{x+y}{x-y}$$

$$B = \frac{x-y}{2y(x+y)}\cdot\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2y} \text{ (với } x \neq \pm y,\ y \neq 0)$$

Khi $x = 2$, $y = 0,01$ thì $B = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2(0,01)} = 50$

Câu 2:

1.a) Giải phương trình $|x-1| + 3|x-4| = 7$ với $1 < x < 4$

- Với $1 < x < 4$ thì $x - 1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x - 1$; $x - 4 < 0 \Rightarrow |x-4| = -x + 4$

  Nên phương trình $|x-1| + 3|x-4| = 7 \Leftrightarrow x - 1 + 3(-x+4) = 7 \Leftrightarrow x = 2$

  Thỏa điều kiện $1 < x < 4$. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 2$

b) $|x-2| - 3x = 5$ (1)

- Nếu $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

  (1) $\Leftrightarrow x - 2 - 3x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$ thỏa điều kiện $x \geq 2$

- Nếu $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

  (1) $\Leftrightarrow -x + 2 - 3x = 5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{4}$ thỏa điều kiện $x < 2$

  Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x = 2$ và $x = -\dfrac{3}{4}$

2) $A = 2x^2 - 20x + 81 = 2x^2 - 20x + 50 + 31$

$A = 2(x^2 - 10x + 25) + 31$

$A = 2(x-5)^2 + 31 \geq 31$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 31 xảy ra $\Leftrightarrow x = 5$

$$B = -5x^2 + \frac{10}{7}x - 1 = -5\left(x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{1}{49}\right) - \frac{44}{49}$$

$B = -5\left(x - \dfrac{1}{7}\right)^2 - \dfrac{44}{49}$. Biết rằng $\left(x - \dfrac{1}{7}\right)^2 \geq 0$ nên B nhỏ nhất là $-\dfrac{44}{49}$ xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$

Câu 3: Gọi số tấn cá dự định đánh bắt theo kế hoạch là x tấn ($x > 0$). Do đó số tấn cá đã đánh bắt được là $(x + 20)$ tấn. Dự định mỗi ngày đánh bắt 30tấn thì số ngày dự định đánh bắt cá là $\dfrac{x}{30}$ ngày

Nhưng mỗi ngày đánh bắt được 40 tấn nên số ngày đã đánh bắt là $\dfrac{x+20}{40}$ ngày

Theo giả thiết ta có $\dfrac{x}{30} - \dfrac{x+20}{40} = 3 \Rightarrow x = 420$

Vậy số tấn cá dự định đánh bắt theo kế hoạch là 420 tấn

Câu 4:

a) Do ΔABC cân nên đường kính $AD \perp BC$ và D là trung điểm của cung nhỏ BC

Do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$

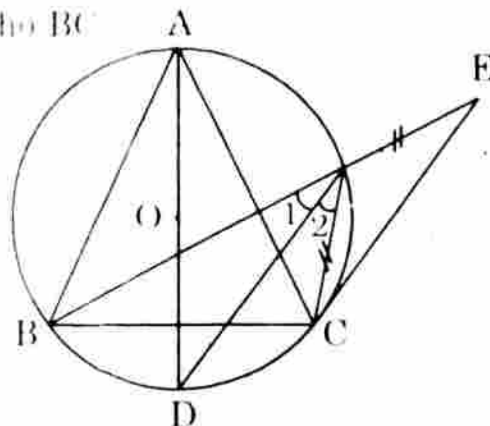
Mặt khác ΔMCE cân (vì MC = ME)

Nên $\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MEC}$

Ta có $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{MCE} + \widehat{MEC}$

(vì $\widehat{BMC}$ là góc ngoài tại M của ΔMCE)

Suy ra $2\widehat{M_2} = 2\widehat{MCE}$ hay $\widehat{M_2} = \widehat{MEC}$ ở vị trí so le trong. Do đó MD // EC



b) ΔAMD vuông tại M vì trung tuyến $MO = \frac{1}{2}AD$. Do đó $AM \perp MD$ suy ra $AM \perp CE$. Như vậy MP là đường cao cũng là trung trực của ΔMCE cân suy ra P là trung điểm của CE

c) Do AP là trung trực của CE nên AC = AE và AC = AB (giả thiết)

Suy ra AB = AC = AE tức là đường tròn tâm A bán kính AE đi qua B và C

d) Xét ΔABE ta có BE < AB + AE mà BE = MB + ME = MB + MC và AB + AE = AB + AC. Vậy MB + MC < AB + AC

ĐỀ THI VÀO PT NĂNG KHIẾU QG TPHCM BAN C, D (2004 – 2005)

Câu 1:

a) Tìm m để Parabol (P) : $y = x^2 + 2mx - m + 2$ tiếp xúc với đường thẳng (d) : $y = x + m$

b) Giả sử phương trình: $mx^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Hãy tính tổng S và tích P của các nghiệm, tìm một hệ thức liên hệ giữa S và P độc lập với m

Câu 2:

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^3 + y^3 = -21 \end{cases}$

b) Giải phương trình: $20 - \sqrt{3 - 2x} = |2x - 3|$

Câu 3:

a) Tìm k để đa thức $f(x) = x^4 - 22x^2 + 51x + 2k$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 3x$ (nghĩa là có đa thức h(x) sao cho f(x) = h(x).g(x)

Giải phương trình f(x) = 0 với k vừa tìm được

b) Rút gọn biểu thức: $R = \dfrac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \dfrac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$

Câu 4: *Cho tam giác ABC vuông ở đỉnh A và* $\widehat{ABC} = 75^o$ *.Đường trung trực của BC cắt đường thẳng BC, AC và AB lần lượt tại các điểm M,N và P*

a) Tính $\dfrac{AN}{AC}$

b) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng BN và PC. So sánh MA và MI

c) Lấy điểm Q trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B sao cho BQ = BI; hạ QJ vuông góc với PC, J nằm trên PC. Tính $\dfrac{QJ}{AB}$

Câu 5: *Hai thành phố A và B cách nhau 48km, gió thổi từ A đến B với vận tốc không đổi 6km/h. Lúc 8giờ, một người đi môtô từ A đến B, nghỉ ngơi 30 phút rồi trở lại A, anh về đến A lúc 10giờ 50 phút. Vận tốc của môtô được cộng thêm hoặc trừ bớt vận tốc của gió, tuỳ theo môtô chạy xuôi chiều gió hoặc ngược chiều gió. Hãy tính tốc độ riêng của môtô (tốc độ của môtô khi tốc độ gió bằng 0)*

Giải

Câu 1:

a) Phương trình hoành độ giao điểm cỉa (d) và (P) là:

$$x^2 + (2m - 1)x - 2m + 2 = 0 \qquad (*)$$

(P) tiếp xúc (d) khi và chỉ khi (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 4m - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}; \quad m = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

b) Theo định lí Viét, ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{(2m+1)}{m} & (1) \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{m^2 - 1}{m} & (2) \end{cases}$

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của (*)

Từ (1), ta có: $m = \dfrac{1}{S+2}$, thay vào (2), ta được: $P = \dfrac{S^2 + 4S + 3}{S + 2}$

Vậy hệ thức liên hệ giữa S và P không phụ thuộc vào m là: $P = \dfrac{S^2 + 4S + 3}{S + 2}$

Câu 2:

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^3 + y^3 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ (x + y)\left[(x + y)^2 - 3xy\right] = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x.y = -\dfrac{20}{3} \end{cases}$

Theo định lí Viet đảo, ta có x, y là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 + X - \frac{20}{3} = 0 \Leftrightarrow 3X^2 + 3X - 20 = 0$$

Giải phương trình trên ta có hệ đã cho có nghiệm (x; y) là:

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{249}}{6}; \frac{-3 - \sqrt{249}}{6}\right); \left(\frac{-3 - \sqrt{249}}{6}; \frac{-3 + \sqrt{249}}{6}\right)$$

b) $20 - \sqrt{3 - 2x} = |2x - 3|$ (1)

Điều kiện: $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$

(1) $\Leftrightarrow 20 - \sqrt{3 - 2x} = 3 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2x} = 17 + 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 + 2x \geq 0 \\ 3 - 2x = (17 + 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{17}{2} \\ 2x^2 + 35x + 143 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{13}{2}$ (nhận)

Vậy nghiệm của (1) là $x = -\dfrac{13}{2}$

Câu 3:

a) Thực hiện phép chia đa thức f(x) cho g(x) ta được:

$$x^4 - 22x^2 + 51x + 2k = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 15) + (30 + 2k)$$

f(x) chia hết cho g(x) khi và chỉ khi $30 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -15$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x - 15) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 3x - 15 = 0 \end{array}\right.$

Giải hai phương trình trên, ta được: $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{69}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{69}}{2}$;

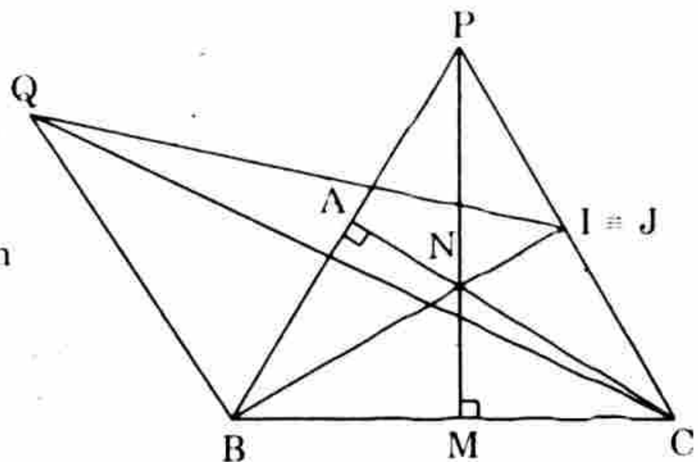
$x_3 = 1$; $x_4 = 2$

b) $R = \dfrac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} : \dfrac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$

$= \dfrac{3a^2 - 3ab + ab - b^2}{2a^2 - ab + 2ab - b^2} : \dfrac{3a^2 - 3ab - ab + b^2}{3a^2 - ab + 3ab - b^2}$

$= \dfrac{(a - b)(3a + b)}{(2a - b)(a + b)} : \dfrac{(a - b)(3a - b)}{(3a - b)(a + b)} = \dfrac{3a + b}{2a - b}$

Câu 4:



a) Theo giả thiết ta có:

$\widehat{NBC} = \widehat{NCB} = 90^0 - 75^0 = 15^0$

Suy ra: $\widehat{ABN} = 60^0$

Nên tam giác ABN là nửa tam giác đều

$\Rightarrow \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (vì NC = BN)

b) Vì N là trực tâm của ΔPBC nên $BI \perp PC$. Do đó A, I thuộc đường tròn đường kính BC

Mặt khác M là trung điểm BC. Do đó MA = MI

c) Ta có: $QP \perp$ mp (ABC) suy ra $QB \perp PC$, mặt khác $QJ \perp PC$ nên $PC \perp$ mp (QBJ)

Do đó $PC \perp BJ$ suy ra $I \equiv J$

Tam giác BQI vuông cân tại B nên ta có: $QI = BI.\sqrt{2} = AC.\sqrt{2}$

Ngoài ra: AN + NC = AC, nên $AB.\sqrt{3} + 2AB = AC$ hay $\left(2 + \sqrt{3}\right)AB = AC$

Do đó $\dfrac{QJ}{AB} = \dfrac{QI}{AB} = \dfrac{AC.\sqrt{2}}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)AB}{AB} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

Câu 5:

Gọi tốc độ riêng của môtô là x (km/h) (x > 6)

Vận tốc của môtô đi từ A đến B là: x + 6 (km/h)

Vận tốc của môtô đi từ B về A là: x − 6 (km/h)

Thời gian người đó đi từ A đến B, từ B về A và nghỉ ngơi là:

10 giờ 50 phút − (8giờ + 30 phút) = 2giờ 20 phút = $\dfrac{7}{3}$ (giờ)

Thời gian người đó đi từ A đến B là: $\dfrac{48}{x+6}$ (giờ)

Thời gian người đó đi từ B về A là: $\dfrac{48}{x-6}$ (giờ)

Theo đề bài ta có phương trình: $\dfrac{48}{x+6} + \dfrac{48}{x-6} = \dfrac{7}{3}$

Giải phương trình trên ta được x = 42

Vậy vận tốc của môtô là 42 (km/h)

Câu 1: *Cho biểu thức* $P = \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} + \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

1) Rút gọn P *2) Tìm x để* $P = \dfrac{9}{2}$

Câu 2: *Cho biết phương trình:* $(3m - 1)x + 1 > 2m + x$ *(m là tham số)*

1) Giải bất phương trình với $m = 1 - 2\sqrt{2}$

2) Tìm m để bất phương trình nhận mọi giá trị $x > 1$ *là nghiệm*

Câu 3: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng* $(d): 2x - y - a^2 = 0$ *và parabol* $(P): y = ax^2$ *(a là tham số dương)*

1) Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung

2) Gọi x_A *và* x_B *là hoành độ của A và B, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = \dfrac{4}{x_A + x_B} + \dfrac{1}{x_A \cdot x_B}$

Câu 4: *Đường tròn tâm O có dây cung AB cố định và điểm I là điểm chính giữa của cung lớn AB. Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB, dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt tia BM tại C*

1) Chứng minh các tam giác AIB và AMC là tam giác cân

2) Khi điểm M di động, chứng minh rằng điểm C di chuyển trên một cung tròn cố định

3) Xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác AMC đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: *Cho tam giác ABC vuông ở A có AB < AC và trung tuyến AM,* $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{AMB} = \beta$. *Chứng minh rằng:* $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$

Giải

Câu 1:

$$P = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} + \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$$. Điều kiện: $x \neq 1$ và $x > 0$

1) Ta có $$P = \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} + \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x + \sqrt{x} + 1 - x + \sqrt{x} - 1 + x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

2) $P = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2}{\sqrt{x}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4;\ x = \frac{1}{4}$

Câu 2:

$3(m - 1)x + 1 > 2m + x$ (*)

1) Với $m = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow$ (*) có dạng: $-\left(6\sqrt{2} + 1\right)x > 1 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x < \frac{4\sqrt{2} - 2}{6\sqrt{2} + 1}$

2) (*) $\Leftrightarrow$ $(3m - 4)x + (1 - 2m) > 0$ (**)

Xét hàm số $f(x) = (3m - 4)x + (1 - 2m)$. Đồ thị hàm số này là một đường thẳng nên để (**) đúng với mọi $x > 1$ thì ta phải có:

$$\begin{cases} 3m - 4 > 0 \\ f(1) = m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$$

Vậy với mọi $m \geq 3$ thì bất phương trình đã cho nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm

Câu 3:

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$ax^2 - 2x + a^2 = 0 \quad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = 1 - a^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Khi đó nếu ta gọi u, v lần lượt là hoành độ của A và B thì theo định lí Viet cho (1) ta có: $\begin{cases} u + v = \frac{2}{a} > 0 \\ u.v = a > 0 \end{cases}$

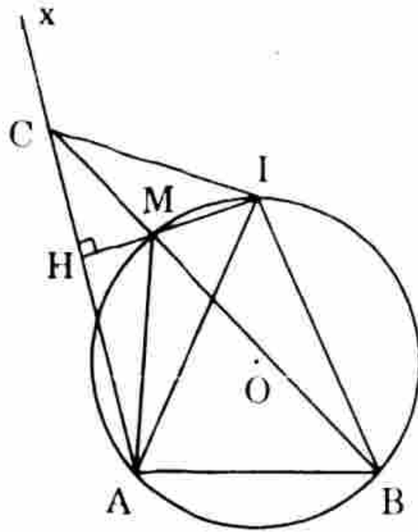
Vậy A, B nằm về bên phải trục tung

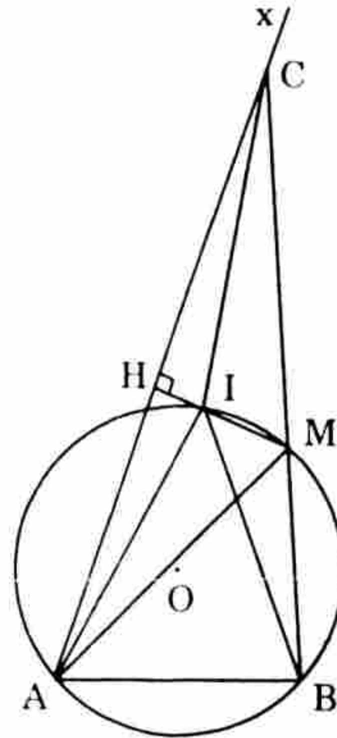
2) Theo câu 1), ta có: $T = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a.\frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$ đạt được $\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 4:





1) Theo giả thiết thì I là điểm chính giữa cung lớn AB nên IA = IB

Do đó ΔAIB cân tại I

- Trường hợp M thuộc cung IA thì $\widehat{CMH} = \widehat{IMB}$ (1)

Mặt khác Sd $\widehat{AMH} = \frac{1}{2}\left(\text{Sd } \overset{\frown}{AM} + \text{Sd } \overset{\frown}{MI}\right) = \frac{1}{2}\text{Sd } \overset{\frown}{IA} = \frac{1}{2}\text{Sd } \overset{\frown}{IB} = \frac{1}{2}\text{Sd } \widehat{IMB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{AMH}$

Tam giác AMC có MH vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên ΔAMC cân tại M

- Trường hợp M nằm trên cung IB, chứng minh tương tự ta cũng được ΔAMC cân tại M

2) Theo câu 1) thì IA = IC, mà IA nằm trên đường tròn tâm I bán kính IA. Khi M $\equiv$ A thì C $\equiv$ A, khi M $\equiv$ B thì C $\equiv$ C_1 (trong đó C_1 là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính IA với đường thẳng qua A vuông góc IB)

Do đó khi M di chuyển trên cung lớn AB thì điểm C chuyển động trên cung AC

3) Giả sử rằng C_0 là giao điểm của AI với đường tròn tâm I bán kính IA, còn M_0 là điểm đối xứng của A qua O

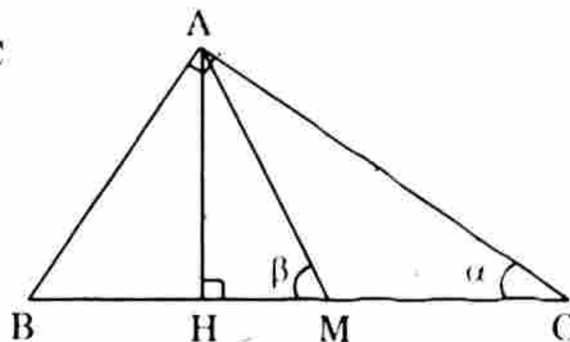
Nhận xet rằng khi tia Ax trùng với tia AI thì M trùng với M_0, khi đó ta có B, M_0, C_0 thẳng hàng

Từ mối liên hệ giữa dây cung và đường kính, ta có $AM \le AM_0, AC \le AC_0$

Gọi p là chu vi. Ta có: p (AMC) $\le$ p (AM_0C_0)

Vậy giá trị lớn nhất của p (AMC) là p (AM_0C_0), đạt được khi và chỉ khi M là điểm xuyên tâm đối của A đối với đường tròn (O)

Câu 5:



Dựng AH vuông góc BC do AB < AC

Nên H thuộc đoạn BM

Khi đó ta có

$AH = AM.\sin\beta = \frac{1}{2}BC.\sin\beta$ (1)

Mặt khác

$AH = AC.\sin\alpha = BC.\sin\alpha.\cos\alpha$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow 1 + \sin\beta = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 BAN (A, B) LÊ HỒNG PHONG, TPHCM

Câu 1:

Cho phương trình (có ẩn số là x): $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$

a) *Chứng tỏ rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m*

b) *Tìm m để tích của hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất*

Câu 2: *Giải các phương trình và hệ phương trình:*

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$ b) $x^2 + \dfrac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

Câu 3:

a) *Cho a > c, b > c, c > 0. Chứng minh:* $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$

b) *Cho a > 0, b > 0. Chứng minh:* $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \le \sqrt{\sqrt{ab}}$

Câu 4: *Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng khi tăng thêm mỗi chữ số một đơn vị thì số mới được tạo thành cũng là một số chính phương*

Câu 5: *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R), số đo góc C bằng 45°. Đường tròn đường kính AB cắt cạnh AC và BC lần lượt tại M và N*

a) *Chứng minh MN vuông góc với OC*

b) *Chứng minh* $MN = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$

Câu 6: *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O; R). Điểm M di động trên cung nhỏ BC. Từ M kẻ các đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC (H thuộc đường thẳng AB, K thuộc đường thẳng AC)*

a) Chứng minh hai tam giác MBC và MHK đồng dạng với nhau

b) Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất

Giải

Câu 1: $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$ (*)

a) Ta có: $\Delta' = (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 1 > 0$

Vậy (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m

b) Theo định lí Viet: $x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 3m + 2}{4} = \dfrac{1}{4}\left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{16} \geq -\dfrac{1}{16}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của x_1x_2 là $\left(-\dfrac{1}{16}\right)$ đạt được khi $m = \dfrac{3}{2}$

Câu 2:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4xy + 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x.y = 8 \end{cases}$

Giải ra ta được hệ có nghiệm (x; y) là: (4; 2); (2; 4)

b) $x^2 + \dfrac{25x^2}{(x + 5)^2} = 11$ (1)

Điều kiện: $x \neq 5$. Khi đó (1) có dạng:

$$\left(x - \frac{5x}{x + 5}\right)^2 + 10\left(\frac{x^2}{x + 5}\right) = 11 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x + 5}\right)^2 + 10\left(\frac{x^2}{x + 5}\right) = 11$$

Đặt $y = \dfrac{x^2}{x + 5}$ (2)

Phương trình trên trở thành: $y^2 + 10y - 11 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = -11$

Với $y_2 = -11$, thay vào (2) thấy phương trình theo ẩn x vô nghiệm

Với $y_1 = 1$, từ (2) ta có phương trình $x^2 - x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}$

Thử lại ta thấy $x_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình đã cho

Câu 3:

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương:

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{a-c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a}\left(\frac{b-c}{b}\right)}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{bc}{b-c} = a$

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $2\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \le \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).\frac{\sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \le \sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}}$$

Câu 4: Gọi số chính phương có bốn chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$ $(a \ne 0)$

Đặt $n^2 = \overline{abcd}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Ta có $n^2 < .10000 \Rightarrow n < 100$

Khi tăng mỗi chữ số $\overline{abcd}$ lên một đơn vị thì ta được số:

$$\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}$$

Theo giả thiết ta có $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$ $\left(m \in \mathbb{N}^*\right)$

Tương tự ta có $m < 100 \Rightarrow 2 \le m + n < 200$

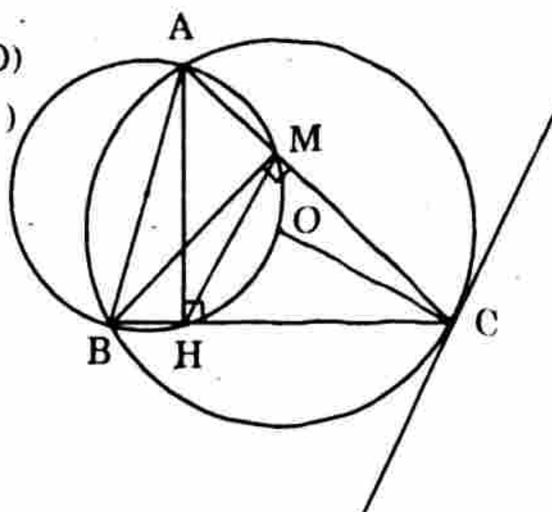
Xét $m^2 - n^2 = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} - \overline{abcd} = 1111$

$\Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 1111$

Vì $1111 = 1 \times 1111 = 11.101$, nên chỉ xảy ra khi $m - n = 11$ và $m + m = 101 \Rightarrow m = 56, n = 45$. Vậy $\overline{abcd} = 45^2 = 2025$

thử lại số cần tìm là 2025

Câu 5:



a) Dựng tiếp tuyến Cx với đường tròn (O) khi đó $\widehat{BAC} = \widehat{BCx}$ (vì cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{MNC}$

(vì cùng bù với $\widehat{MNB}$)

Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{BCx}$, từ đó MN//Cx

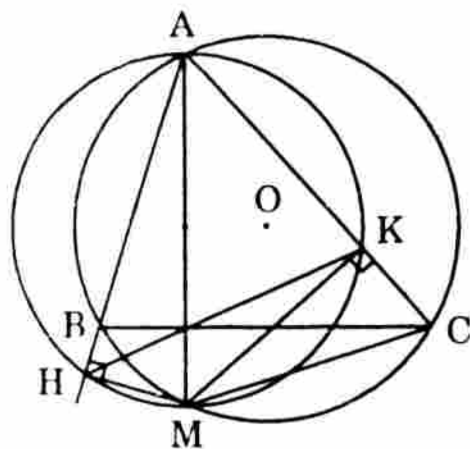
Ta lại có $Cx \perp OC$ nên $MN \perp OC$

b) Dễ thấy $\Delta CMN \sim \Delta CBA$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CN}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (vì ΔCAN cân tại N)

$\Rightarrow MN = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$

Câu 6:



a) Vì bốn điểm A, H, M, K cùng nằm trên đường tròn đường kính AM nên ta có: $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{MHK}$;

$\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKH}$

$\Rightarrow \Delta MBC \sim \Delta MHK$

b) Vì $\Delta MBC \sim \Delta MHK$ (câu a))

$\Rightarrow \dfrac{BC}{HK} = \dfrac{MB}{MH}$ mà $MB \geq MH \Rightarrow \dfrac{BC}{KH} \geq 1$

$\Rightarrow HK \leq BC$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv B$, khi đó $\widehat{APM} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow$ AM là đường kính của đường tròn (O). Do đó điểm M là điểm đối xứng của A qua O thì độ dài HK lớn nhất

ĐỀ THI LỚP 10 TỈNH THÁI BÌNH (2005 – 2006)

Câu 1:

1) Thực hiện phép tính: $\sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

2) Giải phương trình: $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Câu 2: *Cho hàm số :* $y = (2m - 3)x + n - 4$ *(d)* $\left(m \neq \dfrac{3}{2}\right)$

1) Tìm giá trị của m và n để đường thẳng (d) :

a) Đi qua hai điểm A(1; 2), B(3; 4)

b) Cắt trục hoành tại điểm có tung độ $y = 3\sqrt{2} - 1$ *và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ* $x = 1 + \sqrt{2}$

2) Cho n = 0, tìm m để đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') có phương trình: $x - y + 2 = 0$ *tại điểm M(x; y) sao cho biểu thức :*

$P = y^2 - 2x^2$ *đạt giá trị lớn nhất*

Câu 3: *Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là* $720m^2$*, nếu tăng chiều dài mảnh vườn thêm 6m và giảm chiều rộng đi 4m thì diện tích của mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước mảnh vườn*

Câu 4: *Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, kẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D*

1) *Chứng minh:* a) $CD = AC + BD$ b) $AC.BD = R^2$
2) *Xác định vị trí điểm M để tứ giác ABCD có diện tích nhỏ nhất*
3) *Cho biết R = 2cm, diện tích tứ giác ABCD bằng $32cm^2$. Tính diện tích tam giác ABM*

Câu 5: *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn:* $x + y + z = 1$

Chứng minh rằng: $\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \ge \sqrt{5}$

Giải

Câu 1:

1) $\sqrt{5} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2} = \sqrt{5} - \left(\sqrt{5} - 2\right) = 2$

2) Đặt $y = x^2$, $y \ge 0$. Phương trình đã cho có dạng: $y^2 + 5y - 36 = 0$
$\Leftrightarrow y_1 = 4$ và $y_2 = -9$ (loại). Với $y_1 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$; $x = -2$

Câu 2: (d) : $y = (2m - 3)x + n - 4$

1.a) (d) đi qua A(1; 2) và B(3; 4) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m - 3 + n - 4 = 0 \\ 3(2m - 3) + n - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + n = 9 \\ 6m + n = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ m = 2 \end{cases}$$

b) (d) đi qua $\left(0; 3\sqrt{2} - 1\right)$, nên ta có: $n - 4 = 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow n = 3 + 3\sqrt{2}$

(d) đi qua $\left(1 + \sqrt{2}; 0\right)$, nên ta có: $(2m - 3)\left(1 + \sqrt{2}\right) + n - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(1 + \sqrt{2}\right)m - 3 - 3\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2} - 2$

Vậy $m = 2\sqrt{2} - 2$; $n = 3 + 3\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán

2) Với n = 0, ta có (d) : $y = (2m - 3)x - 4$

(d) cắt (d') tại M(x; y) nên tọa độ của M thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} y = (2m - 3)x - 4 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{m - 2} \\ y = \dfrac{2m - 2}{m - 2} \end{cases} \quad (m \ne -2)$$

$$P = y^2 - 2x^2 = \left(\frac{2m - 1}{m - 2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{m - 2}\right)^2 = \frac{4m^2 - 4m - 17}{m^2 - 4m + 4}$$

$\Leftrightarrow (m^2 - 4m + 4)P = 4m^2 - 4m - 17$

$\Leftrightarrow (P-4)m^2 - 4(P-1)m + 4P + 17 = 0 \quad (*)$

Với $p = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{4}$

Với $P \neq 4$, (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 72 - 9P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq 8$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 8 khi $m = \dfrac{7}{2}$

Câu 3: Gọi x (m) (x > 0) là chiều dài mảnh vườn, thì $\dfrac{720}{x}$(m) là chiều rộng của mảnh vườn

Theo đề bài, ta có phương trình: $(x+6)\left(\dfrac{720}{x} - 4\right) = 720$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 1080 = 0 \Leftrightarrow x = 30;\ x = -36$ (loại)

Vậy kích thước mảnh vườn là: 30m × 24m

Câu 4:

1.a) Ta có: CD = CM + DM;

CM = MA; DM = DB (tính chất tiếp tuyến)

Suy ra: CD = AC + BD

b) Ta có: $\widehat{COD} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$OM \perp CD$ (giả thiết)

Suy ra: $AC.BD = CM.DM = OM^2 = R^2$

2) Dễ thấy ABCD là hình thang vuông

nên: $2S_{ABCD} = AB(AC + BD) = 2R.CD \Rightarrow S_{ABCD} = R.CD \geq R.AB = 2R^2$

Vậy ABCD có diện tích nhỏ nhất là $2R^2$, đạt được $\Leftrightarrow$ AB = CD, khi đó M là điểm chính giữa cung AB của nửa đường tròn (O) đường kính AB

3) Theo câu 2) ta có: $CD = \dfrac{32}{2} = 16$(cm)

Do đó $2S_{COD} = OM.CD = 2.16 = 32cm^2 \Rightarrow S_{COD} = 16cm^2$

Dễ thấy $\Delta ABM \sim \Delta COD$, nên:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CDO}} = \frac{AB^2}{CD^2} \Rightarrow S_{ABM} = 16.\frac{AB^2}{CD^2} = 16.\frac{4^2}{16^2} = 1\,cm^2$$

Câu 5:

Ta có: $4(2x^2 + xy + 2y^2) = 5(x+y)^2 + 3(x-y)^2 \geq 5(x+y)^2$

Vì x, y > 0, nên ta suy ra được: $\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(x+y)$

Tương tự ta có: $\sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(y+z)$; $\sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \dfrac{\sqrt{5}}{2}(z+x)$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x + y + z)$$

Do $x + y + z = 1$ suy ra:

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5} \quad \text{(đpcm)}$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG PTTH QUỐC HỌC HUẾ (2004 – 2005)

Câu 1: *Cho biểu thức:* $A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a}$

1) *Tìm điều kiện đối với a, b để biểu thức A được xác định*
2) *Rút gọn biểu thức A*

Câu 2:

1) *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases}$
2) *Giải bất phương trình:* $x + |x - 1| > 5$

Câu 3: *Chứng minh rằng nếu phương trình* $x^2 + 2mx + n = 0$ *có nghiệm thì phương trình:* $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ *cũng có nghiệm*

(m, n, k là các tham số, $k \neq 0$)

Câu 4: *Cho hàm số* $y = ax + b$ *có đồ thị (D) và hàm số* $y = kx^2$ *có đồ thị (P)*

1) *Tìm a, b biết rằng (D) đi qua A(–1; 3) và B(2; 0)*
2) *Tìm $k \neq 0$ sao cho (P) tiếp xúc với đường thẳng (D) vừa tìm được. Viết phương trình của (P)*

Câu 5: *Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Hai đường cao AI và BE cắt nhau tại H*

1) *Chứng minh* $\widehat{CHI} = \widehat{CBA}$
2) *Chứng minh* $EI \perp CO$
3) *Cho* $\widehat{ACB} = 60^o$. *Chứng minh* $CH = CO$

Giải

Câu 1:

1) Điều kiện đối với a, b để A được xác định là: $ab \geq 0$ và $a \neq 0$

2) • Với $ab \geq 0$ và $a > 0$ thì:

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab}}{a} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{ab} + \sqrt{a^2}}{a} = 1$$

• Với $ab \geq 0$ và $a < 0$ thì:

$$A = \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{\sqrt{ab}}{|a|} - \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{a^2}}{a} = \frac{-2\sqrt{ab} - a}{a} = \frac{-2\sqrt{ab}}{a} - 1$$

Câu 2:

1) $$\begin{cases} x^2 + 3y = 1 \\ 3x^2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 = 4 \\ x^2 + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{5}\right)$ và $\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{5}\right)$

2) $$x + |x - 1| > 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1 \\ x + 1 - x > 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x + x - 1 > 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Câu 3:

Phương trình: $x^2 + 2mx + n = 0$ có nghiệm khi $\Delta' = m^2 - n \geq 0$

Phương trình: $x^2 + 2\left(k + \frac{1}{k}\right)mx + n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = 0$ (*) có:

$$\Delta' = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - n\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 \left(m^2 - n\right) \geq 0$$

Vậy phương trình (*) cũng có nghiệm

Câu 4:

1) Vì đường thẳng (D) đi qua hai nghiệm A(-1; 3) và B(2; 0) nên:

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

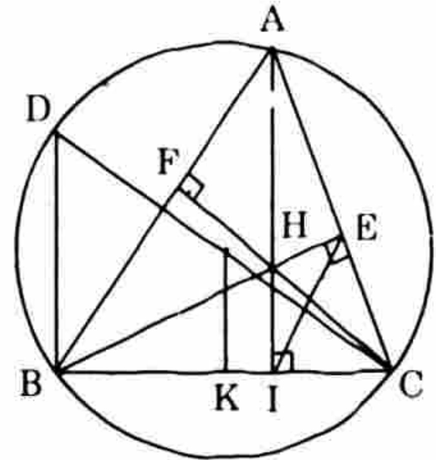
2) Phương trình hoành độ của (P) và (D): $kx^2 = -x + 2$

$\Leftrightarrow kx^2 + x - 2 = 0$ (*) (với $k \neq 0$)

(D) tiếp xúc (P) khi (*) có nghiệm kép

hay $\Delta = 0 \Leftrightarrow 1+8k=0 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{8}$

Câu 5:



1) Nối CH cắt AB tại F

Do H là trực tâm của tam giác ABC

nên CF ⊥ AB

nên ta có $\widehat{CHI}$ vuông và

$\widehat{HCI} = 90^o - \widehat{FBC} = \widehat{CBA}$

2) Kẽ đường kính CD của đường tròn (O), ta có:

$\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \widehat{ABE} = \widehat{FCE} = \widehat{AIE}$

Vì $\widehat{AIE} + \widehat{EIC} = 90^o$, nên $\widehat{BCD} + \widehat{EIC} = 90^o$, tức là EI ⊥ CO (đpcm)

3) Ta có: $\widehat{CHE} = \widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ nên hai tam giác vuông CHE và CDB đồng dạng, do đó $\frac{CH}{CD} = \frac{CE}{CB}$ (*)

Theo giả thiết thì $\widehat{ACB} = 90^o$, nên $\widehat{EBC} = 30^o$ và $CE = \frac{1}{2}CB$

Từ (*), ta có: $\frac{CH}{CD} = \frac{1}{2}$, nên CH = CO

ĐỀ THI LỚP 10 TỈNH HÀ NAM (2005 – 2006)

Câu 1:

1) Giải các phương trình: a) $2x^2 - 3x - 9 = 0$; b)

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - x - 6} - 1 = 0$$

2) Rút gọn các biểu thức:

a) $P = \frac{\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}}$ *b)* $Q = \sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x + 1 - \sqrt{4x}}$ *(với $x \geq 0$)*

Câu 2: *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm A(-5; 1), B(-1; 4), C(3;2)*

1) Vẽ tam giác ABC

2) Viết phương trình đường thẳng BC

3) *Không dùng đồ thị, hãy xác định tọa độ của D với D là giao điểm của đường thẳng qua A song song với Ox và đường thẳng qua B song song với Oy*

Câu 3: *Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O; R). Từ A kẻ đường thẳng (d) không đi qua tâm O, cắt (O; R) tại B và C (B nằm giữa A và C). Các tiếp tuyến với (O; R) tại B và C cắt nhau tại D. Từ D kẻ DH vuông góc với AO (H nằm trên AO) cắt cung nhỏ BC tại M. Gọi E là giao điểm của DO và BC*

1) *Chứng minh DHOC là tứ giác nội tiếp*

2) *Chứng minh OH.OA = OE.OD*

3) *Chứng minh AM là tiếp tuyến với (O; R)*

Câu 4: *Với x thỏa mãn* $2(x-1) = \sqrt{2(x^2+x+1)}$, *tính giá trị biểu thức:*

$$T = \frac{-2x^3 + 13x^2 - 19x + 1}{2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 17x - 2}$$

Giải

Câu 1:

1) Giải phương trình:

a) $2x^2 - 3x - 9 = 0$ có $\Delta = 9 + 72 = 81 = 9^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$

Do đó phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3+9}{4} = 3$

b) Điều kiện : $x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2; x \neq -3$

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 - x - 6} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 4x - 4 - (x^2 - x + 6)}{x^2 - x - 6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 6} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Có $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

Do đó $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -2$

2.a) $P = \frac{\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8} - \frac{6 - \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} = -4$

b) $Q = \sqrt{x + 1 + 2\sqrt{x}} - \sqrt{x + 1 - 4\sqrt{x}} = \sqrt{(\sqrt{x}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} = \sqrt{x} + 1 - |\sqrt{x} - 1|$

Nếu $x \geq 1$ thì $Q = \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 1 = 2$

Nếu $0 \leq x < 1$ thì $Q = \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x}$

Câu 2:

1) Vẽ tam giác ABC

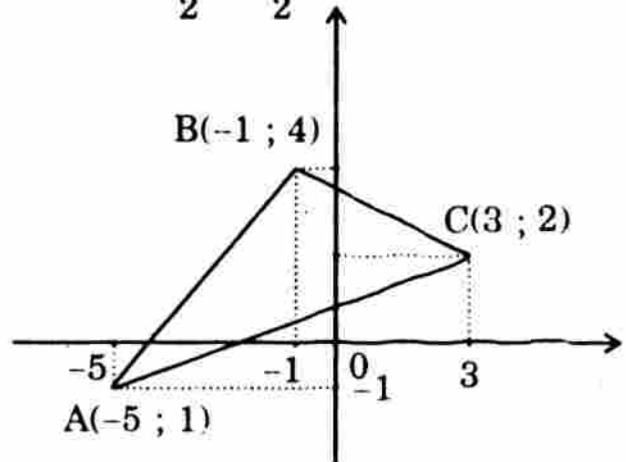
2) Phương trình đường thẳng BC có dạng: $y = ax + b$

Điểm B thuộc đường thẳng BC nên: $4 = -a + b$ (1)

Điểm C thuộc đường thẳng BC nên: $2 = 3a + b$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được: $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{7}{2}$

Vậy phương trình đường thẳng BC là $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$



3) Đường thẳng song song với BC có dạng: $y = -\frac{1}{2}x + b$

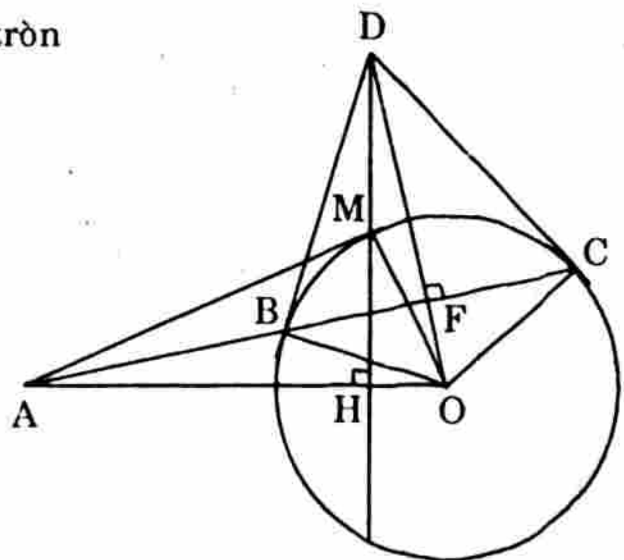
Vì đường thẳng này qua A nên $-5 = -\frac{1}{2}(-1) + b \Rightarrow b = -\frac{7}{2}$

Đường thẳng qua B song song với trục Oy là: $x = -1$

Giải hệ $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1; y = -3$

Vậy D(-1; -3)

Câu 3:



1) Vì DC là tiếp tuyến của đường tròn (O; R) nên $\widehat{DCO} = 90^o$

Cũng theo giả thiết $DH \perp AO$ nên $\widehat{DHO} = 90^o$

Tứ giác DHOC có $\widehat{DCO} + \widehat{DHO} = 180^o$

Nên nội tiếp đường tròn đường kính DO

2) Theo giả thiết DB, DC là tiếp tuyến của đường tròn(O;R) nên DB = DC

Và $\widehat{BDO} = \widehat{CDO}$. Phân giác DE trong tam giác DBC cũng là đường cao nên $DE \perp BC$

Hai tam giác vuông HDO và EAO có chung góc nhọn DOA nên $\Delta HOD \sim \Delta EOA$ nên: $\frac{HO}{EO} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow OH.OA = OE.OD$ (1)

3) Trong tam giác vuông COD có CE vuông góc với DO, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông có: $OE.OD = OC^2 = R^2$ (2)

Từ (1) và (2) có: $OH.OA = OC^2$, vì $OC = OM$ nên $OH.OA = OM^2$.

Trong tam giác vuông AMO có $MH \perp OA$ nên $OH.OA = OM^2$ nên $OM \perp AM$ hay AM là tiếp tuyến của (O; R)

Câu 4:

$$2(x-1) = \sqrt{2(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4(x-1)^2 = 2(x^2+x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

Ta có: $-2x^3 + 13x^2 - 19x + 1 = (x^2 - 5x + 1)(-2x + 3) - 2x - 2$

Và $2x^4 - 9x^3 - 6x^2 + 17x - 2 = (x^2 - 5x + 1)(2x^2 + x - 3) + x + 1$

Với $x = x_1$ thì $(x^2 - 5x + 1) = 0$, do đó: $T = \frac{-2x_1 - 2}{x_1 + 1} = \frac{-2(x_1+1)}{x_1+1} = -2$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TỈNH THÁI BÌNH (2002 – 2003)

Câu 1: *Cho biểu thức:* $K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x+2003}{x}$

a) Tìm điều kiện của x để k xác định

b) Rút gọn K

c) Với những giá trị nguyên nào của x thì K có giá trị nguyên

Câu 2: *Cho hàm số $y = x + m$ (D). Tìm m để (D):*

a) Đi qua điểm A(1; 2003)

b) Song song với đường thẳng: $x - y + 3 = 0$

c) Tiếp xúc với (P) : $y = -\frac{1}{4}x^2$

Câu 3:

a) Một hình chữ nhật có đường chéo 13m, chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m. Tính diện tích của hình chữ nhật

b) Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

Câu 4: *Cho tam giác ABC vuông tại A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy điểm E. Kéo dài BE cắt AC tại F*

a) Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp

b) Kéo dài DE cắt AC tại K. Tia phân giác góc CKD và cắt EF và CD

tại M và N. Tia phân giác góc $\widehat{CBF}$ cắt CD và CF tại P và Q. Tứ giác MPNQ là hình gì ?

c) *Gọi r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC; ABD; ADC. Chứng minh : $r^2 = r_1^2 + r_2^2$*

Giải

Câu 1: $K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x+2003}{x}$

a) Điều kiện để K xác định là: $x \neq 0$; $x \neq \pm 1$

b) $K = \left[\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{x^2-1}\right]\frac{x+2003}{x} = \frac{x^2-1}{x^2-1}\cdot\frac{x+2003}{x} = \frac{x+2003}{x}$

c) $K = 1 + \frac{2003}{x}$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $K \in \mathbb{Z}$ khi 2003 chia hết cho x, suy ra $x = \pm 1$; $x = \pm 2003$

So với điều kiện chọn $x = \pm 2003$ (thỏa yêu cầu bài toán)

Câu 2:

a) (D) đi qua A(1; 2003) khi: $2003 = 1 + m \Rightarrow m = 2002$

b) (D) song song với đường thẳng $x - y + 3 = 0$ nên $m \neq 3$

c) (D) tiếp xúc với (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$ khi phương trình hoành độ giao điểm

$-\frac{1}{4}x^2 = x + m$ có nghiệm kép hay $x^2 + 4x + 4m = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 3:

a) Gọi x (m) ($7 < x < 13$) là chiều dài của hình chữ nhật, thì chiều rộng của hình chữ nhật là $x - 7$ (m)

Theo định lý Pitago ta có phương trình: $x^2 + (x-7)^2 = 13^2$

Giải phương trình trên, ta được: $x = 12$; $x = -5$ (loại)

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 12m,chiều rộng hình chữ nhật là 5(m)

Diện tích hình chữ nhật là: $12.5 = 60$ (m^2)

b) $\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

$\Leftrightarrow 2002\sqrt{2002} + 2003\sqrt{2003} > 2002\sqrt{2003} + 2003\sqrt{2002}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2003} > \sqrt{2002}$ đúng

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh

Câu 4:

a) Ta có: $\widehat{FCD} = \widehat{BAD}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (cùng chắn cung BD)

Suy ra: $\widehat{FCD} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{FCD} + \widehat{FED} = \widehat{BED} + \widehat{FED} = 180^0$

Vậy tứ giác CDEF nội tiếp

b) Ta có: $\widehat{AQB} = \widehat{ACB} + \widehat{QBC}$ (góc ngoài của tam giác BQC bằng tổng hai góc trong không kề nó); $\widehat{KPQ} = \widehat{BED}$ (góc ngoài của tam giác BEF bằng tổng hai góc trong không kề nó)

$\widehat{QBC} = \widehat{QBF}$ (giả thiết); $\widehat{ACB} = \widehat{BED}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{KPQ} = \widehat{KQP}$, do đó ΔPKQ cân $\Rightarrow PQ \perp KN$ và $PI = IQ$

$\Rightarrow MI = IN$. Vậy MNPQ là hình thoi

c) Dễ thấy: $r = AB + AC - BC$; $r_1 = AD + DC - AC$; $r_2 = AD + DB - AB$

Ta có: $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ nên: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD + DC - AC}{AB + AC - BC} = \dfrac{r_1}{r}$ (1)

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$ nên: $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD + DB - AB}{AB + AC - BC} = \dfrac{r_2}{r}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{r_1^2}{r^2} = \dfrac{AC^2}{BC^2}$; $\dfrac{r_2^2}{r^2} = \dfrac{AB^2}{BC^2} \Rightarrow \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = 1$

Vậy $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 LÊ QUÝ ĐÔN BÌNH ĐỊNH (2005 – 2006)

Câu 1: *Tính giá trị biểu thức:* $A = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, *với* $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ *và* $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

Câu 2: *Giải phương trình:* $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8$

Câu 3: *Cho hàm số* $y = x^2$ *có đồ thị (P) và hai điểm A, B thuộc (P) có hoành độ lần lượt là* -1 *và 2*

a) Viết phương trình đường thẳng AB

b) Vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ M thuộc cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất

Câu 4: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O có trực tâm H. Phân giác trong góc A cắt đường tròn (O) tại M. Kẻ đường cao AK của tam giác. Chứng minh rằng:*

a) Đường thẳng OM đi qua trung điểm N của BC

b) Các góc $\widehat{KAM}$ *và* $\widehat{MAO}$ *bằng nhau*

c) $AH = 2NO$

Câu 5: *Tính tổng* $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)$

Giải

Câu 1:

Ta có: $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$; $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

Suy ra: $A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{9-3} = 1$

Câu 2:

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} + x = 8 \Leftrightarrow |x-2| + x = 8 \quad (1)$

Nếu $x \le 2$ thì (1) trở thành: $2 - x + x = 8 \Leftrightarrow 2 = 8$ (vô nghiệm)

Nếu $x > 2$ thì (1) trở thành: $x - 2 + x = 8 \Leftrightarrow x = 5$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 5$

Câu 3:

a) Vì A, B thuộc đồ thị hàm số $y = x^2$ nên ta có: $A(-1; 1)$; $B(2; 4)$

Phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$ (*)

Thay tọa độ của A và B vào (*) ta có: $\begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

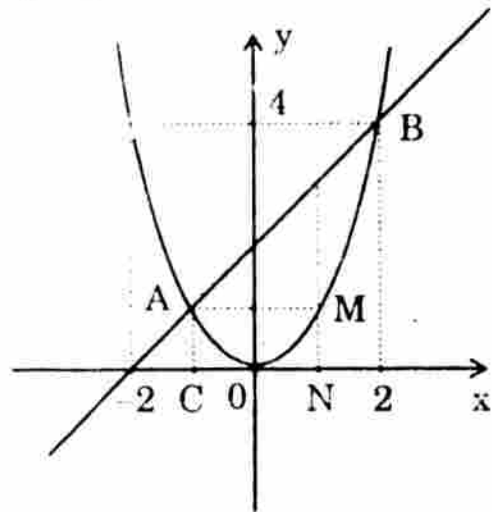
Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = x + 2$

b) Gọi m là hoành độ của điểm M

Ta có: $M(m; m^2)$ $(m \in [-1; 2])$

Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B, M lên trục Ox ta có:

$NC = m + 1$; $ND = 2 - m$; $CD = 3$



Ta có: $S_{AMB} = S_{ABCD} - (S_{AMNC} + S_{BDMN})$

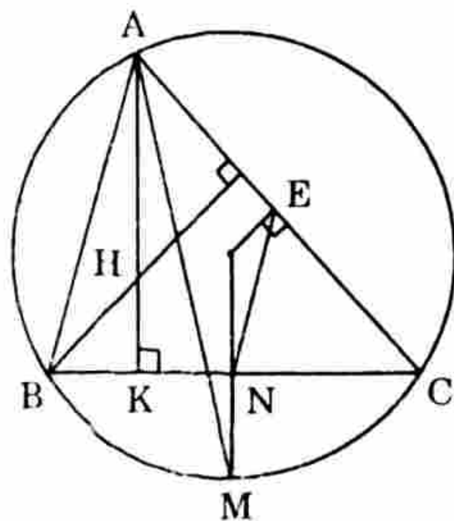
$$= 3.\frac{1+4}{2} - \left[\frac{(m^2+1)(m+1)}{2} + \frac{(4+m^2)(2-m)}{2}\right]$$

$$= \frac{-3m^2 + 3m + 6}{2} = \frac{-3}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8} \le \frac{27}{8}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ hay $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Vậy diện tích tam giác MAB lớn nhất là $\frac{27}{8}$ khi $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

Câu 4:



a) Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (giả thiết)

Suy ra $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM} \Rightarrow OM \perp BC$ tại trung điểm N của BC

b) Ta có: AK//OM (vì cùng vuông góc với BC)

Suy ra $\widehat{KAM} = \widehat{AMO}$ (so le trong)

Mặt khác: $\widehat{AMO} = \widehat{NAO}$

Suy ra: $\widehat{KAM} = \widehat{MAO}$

c) Gọi F là trung điểm của BC

Ta có EN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra EN // AB; $FN = \frac{AB}{2}$. Mặt khác AH // ON (cùng vuông góc BC); BH // OE (cùng vuông góc với AC), suy ra $\Delta AHB \sim \Delta NOE$ (g - g - g)

$$\Rightarrow \frac{NO}{AH} = \frac{NE}{AB} = \frac{1}{2}$$

Vậy AH = 2NO

Câu 5:

Do $k(k + 1) = k + k^2$, ta có: $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1)$

$= (1 + 2 + 3 + ... + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$ (1)

Dễ dàng chứng minh được: $1^2 + 2^2 + 3^3 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (2)

Theo phương pháp qui nạp theo n, với $n \in \mathbb{N}^*$ và

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $S = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$